

Tentti 1.9.2008

Kirjoita koepapereihin selvästi

- Mat-2.3148 Dynaaminen optimointi, tentti 1.9.2008
- opintokirjan n:ro, TEKSTATEN sukunimi, viralliset etunimet (puhuttelunimi alleviivaten)
- koulutusohjelma, vuosikurssi
- nimikirjoitus

1. Määrittele lyhyesti, mutta täsmällisesti

- a) Avoimen silmukan ohjaus
- b) Funktionaalin inkrementti
- c) Täydellisesti ohjattava systeemi
- d) Nykyarvoliittotila
- e) Weierstrass-Erdmann kulmaehdot
- f) Optimaalisuusperiaate

2. Polkupyörälähetä aikoo toimia alalla seuraavat viisi vuotta. Hänellä ei ole aluksi polkupyörää ja hän suunnittelee optimaalista pyörän uusimishjelmaa. Yhtä pyörää voi käyttää enintään kolme vuotta. Kustannukset (hankinta, ylläpito, yms) pyörän pitämisestä, yhden, kaksi ja kolme vuotta ovat vastaavasti 130, 270, ja 380 euroa. Pyörälähetin tehtävän voi muotoilla dynaamisen optimoinnin ongelmana, jossa tilamuuttujana on kuinka monta vuotta on jäljellä viidennen vuoden loppuun ja päätöksenä kauanko polkupyörää pidetään. Esim. jos hetkellä 1 (toisen vuoden alussa) päätöksenä on pitää pyörä 3 vuotta niin siirrytään tilaan 1. Ratkaise optimaalinen uusimishjelma dynaamisella ohjelmoinnilla.

3. Hetkellä t hyönteispopulaatiossa on työläisiä määrä $w(t)$ ja kuningattaria määrä $q(t)$. Muuttuja $u(t) \in [0, 1]$ kuvaa osuutta työläisistä, joka tuottaa lisää työläisiä hetkellä t . Populaatiodynamiikkaa kuvaa yhtälöt $\dot{w} = (au - b)w$ ja $\dot{q} = (1 - u)w$, missä $a > b > 0$. Työläisten tavoitteena on maksimoida kuningattarien määrä hetkellä T (kiinteä loppu-aika) lähtien hetkestä $t = 0$ ja annetusta alkupopulaatiosta w_0, q_0 . Muodosta Pontrjagin maksimiperiaatteen mukaiset ehdot optimille. Totea ehtojen avulla, että ratkaisu on muotoa: aluksi työläiset tuottavat pelkästään työläisiä ja lopuksi pelkästään kuningattaria. (Vihje: saat liittotilaksi $p_1(t) = (1 - e^{-b(T-t)})/b$ kun $u(t) = 0$.)

Jatkuu kääntöpuolella

4. Todennäköisyysjakauman entropia kuvaa sitä, kuinka ”hajallaan” satunnaismuuttujan arvot ovat. Välillä $[a, b]$ määritellyn satunnaismuuttujan x todennäköisyysjakauman entropia S on

$$S = - \int_a^b f(x) \ln f(x) dx,$$

missä $f(x)$ on x :n tiheysfunktio ja sille pätee

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

Osoita variaatiolaskun keinoin, että S saavuttaa maksiminsa, kun $f(x) = 1/(b - a)$ eli tasajakauma.

5. Tarkastellaan dynaamista optimointitehtävää

$$\begin{aligned} \min_u J(u) &= q(x(T), T) + \int_0^T g(x(t), u(t), t) dt \\ \dot{x} &= f(x(t), u(t), t) \\ H(x(t)) &\leq 0 \\ S(u(t), x(t)) &\leq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

missä $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$ ja T voi olla kiinnitetty tai vapaa. $H : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$, $S : \mathbb{R}^{m \times n} \mapsto \mathbb{R}^r$, g ja q ovat epälineaarisia, joten tehtävää ei pystytä ratkaisemaan analyttisesti. Miten ratkaisisit tehtävän numeerisesti diskretoimalla ajan? Muotoile diskretoitu tehtävä.

Huom. Kotitehtäväpisteillä korvataan huonoiten mennyt tenttitehtävä, jos siten on mahdollista saada tentistä enemmän pisteitä.