Tentti 8.5.2008

Kirjoita koepapereihin selvästi

- Mat–2.3148 Dynaaminen optimointi, tentti 8.5.2008
- opintokirjan n:ro, TEKSTATEN sukunimi, viralliset etunimet (puhuttelunimi alleviivaten)
- koulutusohjelma, vuosikurssi
- nimikirjoitus

1. Määrittele lyhyesti, mutta täsmällisesti

   a) Suljetun silmukan ohjaus

   b) Funktionaalin variaatio

   c) Täydellisesti ohjattava systeemi

   d) Singulaariväli

   e) Weierstrass-Erdmann kulmaehdot

   f) Optimaalisuusperiaate

2. Ratkaise tehtävä
$$\min J = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}^2(t)]dt + [x(1)]^2,$$
kun $x(0) = 1$ ja $x(1)$ on vapaa.

3. Tarkastellaan Goddardin rakettitehtävää, jossa tarkoituksena on päästä raketilla mahdollisimman korkealle tankillisella polttoainetta. Tehtävä on
$$\begin{aligned}&\max h(t_f)\\ &\text{s.e. } \dot{h}(t) = v(t),\\ &\dot{v}(t) = u(t)/m(t) - g\\ &\text{ja } \dot{m}(t) = -\gamma u(t),\end{aligned}$$
missä h on korkeus, v on nopeus, u on kiihtyvyys (ohjaus), $|u(t)| \leq \bar{u}$, m on massa, g on maan vetovoiman kiihtyvyys ja γ on vakio. Lisäksi raketti lähtee levosta nollatasolta eli $h(0) =$, $v(0) = 0$, ja sen alkumassa on m_0. Loppuaika t_f on vapaa ja lopputila on $m(t_f) = m_f$ (tankki tyhjä). Osoita että optimaalinen ohjaus on $u(t) = \bar{u}$ kunnes $m(t_f) = m_f$. Mitä tapahtuu, kun $\bar{u} \to \infty$? (Huom. kääntöpuolella on mahdollisesti tehtävän ratkaisua helpottavaa lisätietoa.)

Jatkuu kääntöpuolella

4. Ratkaise tehtävän

$$\max_{u_k>0} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \ln(u_k)$$
$$\text{s.e. } x_{k+1} = x_k - u_k \ \forall k \geq 0$$

optimaalinen arvofunktio ja ohjaus. Diskonttauskertoimelle pätee $\alpha \in (0,1)$. Voit olettaa, että $x > 0$. Vihje: ratkaise optimaalinen arvofunktio sopivalla yritteellä Bellmanin yhtälöstä.

5. Olet päättänyt ratkaista miten planeettamme talouden tulisi kasvaa, kun huomioidaan ilmastonmuutoksen vaikutus tuotannontekijöihin. Sinulla on ilmastomalli $\dot{x} = f_1(x,u)$, missä x on vektori, joka sisältää ilmaston kannalta keskeiset parametrit (alemman ja ylemmän ilmakehän sekä meren lämpötilat), u on kulutusta ja siten myös kasvihuonekaasupäästöjä kuvaava muuttuja (päätösmuuttuja). Taloudellisen kasvun dynamiikkaa kuvaa yhtälö $\dot{y} = f_2(x,y,u)$, missä y on tuotannontekijöiden (mm. väestö ja pääoma) määriä kuvaava vektori. Maksimoitava funktionaali on muotoa $\int_{t_0}^{t_f} e^{-rt} g(y,u)dt$, $r > 0$. Esitä jokin tapa ratkaista optimaalisen kulutusstrategian approksimaatio numeerisesti.

Lisätietoa: optimiohjaustehtävälle, jossa lopputilalle $\mathbf{x}(t_f)$ on annettu rajoite $m(\mathbf{x}(t_f) = 0$, $m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, pätee transversaalisuusehto $(\partial h/\partial \mathbf{x} - \mathbf{p})|_{t=t_f} = v\partial m(t_f)/\partial \mathbf{x}$ jollakin skalaarilla v. Tässä h on lopputilakustannus ja $\mathbf{p}$ liittotilavektori. Vapaan loppuajan tehtävälle pätee lisäksi $(\mathscr{H} + \partial h/\partial t)|_{t=t_f} = 0$, missä $\mathscr{H}$ on Hamiltonin funktio.

Huom. Kotitehtäväpisteillä korvataan huonoiten mennyt tenttitehtävä, jos siten on mahdollista saada tentistä enemmän pisteitä.