Kirjoita koepapereihin selvästi

- Mat–2.3148 Dynaaminen optimointi, tentti 14.1.2009
- opintokirjan n:ro, TEKSTATEN sukunimi, viralliset etunimet (puhuttelunimi alleviivaten)
- koulutusohjelma, vuosikurssi
- nimikirjoitus

1. Määrittele lyhyesti, mutta täsmällisesti

   a) Avoimen silmukan ohjaus

   b) Funktionaalin inkrementti

   c) Täydellisesti ohjattava systeemi

   d) Singulaariväli

   e) Weierstrass-Erdmann kulmaehdot

   f) Optimaalisuusperiaate

2. Rauno Rahtarilla on rekkakuormassaan tilaa 1000 kg. Hänellä on mahdollisuus ottaa kuormaan ruotsalaisia tykkejä (arvo, paino)=(7, 300) per kpl (eli arvo=7 ja paino=300), Islannin hevosia (arvo,paino)=(8, 400) per kpl ja egyptiläisiä sarkofageja (arvo, paino)=(11, 600) per kpl. Rauno pyrkii maksimoimaan kuormansa arvon. Tämä tehtävä (ns. knapsack ongelma) voidaan muotoilla dynaamisen ohjelmoinnin tehtävänä, jossa tilamuuttuja on kuormassa jäljellä oleva vapaa kapasiteetti kunkin vaiheen alussa. Vaiheita on yksi kutakin tavaraa (tykkejä, hevosia ja sarkofageja) kohden, ja kussakin vaiheessa Rauno päättää montako kappaletta vaihetta vastaavaa rahtia ottaa kuormaansa. Jäljellä oleva kapasiteetti ei tietenkään saa ylittyä. Eli ensimmäisessä vaiheessa Rauno päättää tykkien määrän kuormassa, sitten hevosten ja lopuksi sarkofagien. Ratkaise Raunon optimointitehtävä dynaamisella ohjelmoinnilla, kun olet ensin muotoillut tehtävän matemaattisesti.

3. Tarkastellaan Goddardin rakettitehtävää, jossa tarkoituksena on päästä raketilla mahdollisimman korkealle tankillisella polttoainetta. Tehtävä on

$$\begin{aligned}&\max h(t_f)\\ &\text{s.e. } \dot h(t) = v(t),\\ &\dot v(t) = u(t)/m(t) - g\\ &\text{ja } \dot m(t) = -\gamma u(t),\end{aligned}$$

   missä h on korkeus, v on nopeus, u on kiihtyvyys (ohjaus), $|u(t)| \leq \bar u$, m on massa, g on maan vetovoiman kiihtyvyys ja γ on vakio. Lisäksi raketti lähtee levosta nollatasolta eli $h(0) =$, $v(0) = 0$, ja sen alkumassa on m_0. Loppuaika t_f on vapaa ja lopputila on $m(t_f) = m_f$ (tankki tyhjä). Osoita että optimaalinen ohjaus on $u(t) = \bar u$ kunnes $m(t_f) = m_f$. Mitä tapahtuu, kun $\bar u \to \infty$? (Huom. kääntöpuolella on mahdollisesti tehtävän ratkaisua helpottavaa lisätietoa.)

Jatkuu kääntöpuolella

4. Ratkaise tehtävä

$$\min J = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}^2(t)]dt + [x(1)]^2,$$

kun $x(0) = 1$ ja $x(1)$ on vapaa.

5. Tarkastellaan dynaamista optimointitehtävää

$$\begin{aligned} \min_u J(u) &= q(x(T), T) + \textstyle\int_0^T g(x(t), u(t), t)dt \\ \dot{x} &= f(x(t), u(t), t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

missä $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$ ja T voi olla kiinnitetty tai vapaa. Esitä tehtävän numeeriseksi ratkaisemiseksi jokin suora menetelmä, jossa aika diskretoidaan.

Lisätietoa: optimiohjaustehtävälle, jossa lopputilalle $\mathbf{x}(t_f)$ on annettu rajoite $m(\mathbf{x}(t_f) = 0$, $m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, pätee transversaalisuusehto $(\partial h/\partial \mathbf{x} - \mathbf{p})|_{t=t_f} = v\partial m(t_f)/\partial \mathbf{x}$ jollakin skalaarilla v. Tässä h on lopputilakustannus ja $\mathbf{p}$ liittotilavektori. Vapaan loppuajan tehtävälle pätee lisäksi $(\mathscr{H} + \partial h/\partial t)|_{t=t_f} = 0$, missä $\mathscr{H}$ on Hamiltonin funktio.

Huom. Kotitehtäväpisteillä korvataan huonoiten mennyt tenttitehtävä, jos siten on mahdollista saada tentistä enemmän pisteitä.