Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2

Heikkinen/Tikanmäki

Toinen välikoe 29.03.2011

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksiin hyväksyttyä laskinta.

1. Funktion $f(x, y)$ asteen n Taylorin polynomi keskuksena (a, b) on

$$P_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^{m-j}}{\partial y^{m-j}} f(a, b)(x-a)^j (y-b)^{m-j}.$$

   Määrää funktion $f(x, y) = e^{x+2y}$ toisen asteen Taylorin polynomi keskuksena $(0, 0)$.

2. a) Laske $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin(x^2)\, dy\, dx$.

   b) Laske $\iint_D y\, dA$, kun D on puolikiekko $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

3. a) Laske

$$\iiint_R xy \cos z\, dV,$$

   kun R on suorakulmainen särmiö $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq \pi/2$.

   b) Laske

$$\iiint_D z\, dV,$$

   kun D on epäyhtälöiden $y \geq 0$, $z \geq 0$ ja $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ määräämä neljäsosapallo. Saatat tarvita pallokoordinaattimuunnosta

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

$$dV = dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

4. a) Onko vektorikenttä $F(x, y) = -yi + xj$ konservatiivinen?

   b) Laske Helix-käyrän $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ kaarenpituus parametrivälillä $t \in [0, 4\pi]$.

K2 : vk2

t:1 Määrää funktion $f(x,y)=e^{x+2y}$ toisen asteen Taylorin polynomi keskuksena $(0,0)$

TAPA I

Funktion $f(x,y)$ n:nnen asteen Taylorin polynomi keskuksena (a,b) on tehtävänannon mukaan

$$P_n(x,y)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!(m-j)!}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^{m-j}}{\partial y^{m-j}}f(a,b)(x-a)^j(y-b)^{m-j}$$

Nyt $n=2$ ja $(a,b)=(0,0)$, joten

$$P_2(x,y)=\sum_{m=0}^{2}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!(m-j)!}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^{m-j}}{\partial y^{m-j}}f(0,0)x^jy^{m-j}$$

$$=\frac{1}{0!0!}\frac{\partial^0}{\partial x^0}\frac{\partial^0}{\partial y^0}f(0,0)x^0y^0 \qquad \| m=0, j=0$$

$$+\frac{1}{0!\cdot 1!}\frac{\partial^0}{\partial x^0}\frac{\partial^1}{\partial y^1}f(0,0)x^0y^1 \qquad \| m=1, j=0$$

$$+\frac{1}{1!\cdot 0!}\frac{\partial^1}{\partial x^1}\frac{\partial^0}{\partial y^0}f(0,0)x^1y^0 \qquad \| m=1, j=1$$

$$+\frac{1}{0!\cdot 2!}\frac{\partial^0}{\partial x^0}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,0)x^0y^2 \qquad \| m=2, j=0$$

$$+\frac{1}{1!\cdot 1!}\frac{\partial^1}{\partial x^1}\frac{\partial^1}{\partial y^1}f(0,0)x^1y^1 \qquad \| m=2, j=1$$

$$+\frac{1}{2!\cdot 0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^0}{\partial y^0}f(0,0)x^2y^0 \qquad \| m=2, j=2$$

$$=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot y^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot x^2$$

Lasketaan tarvittavat osittaisderivaatat ja sijoitukset:

$f(0,0)=e^0=1$

$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=e^0=1$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2\cdot e^0=2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=e^0=1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=4e^0=4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2e^{x+2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=2e^0=2$

Sijoitetaan derivaattojen arvot kehityskeskuksessa P_2:n lausekkeeseen:

$$\underline{P_2(x,y)} = 1 + 2y + x + \frac{1}{2}\cdot 4y^2 + 2\cdot xy + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x^2$$

$$= \underline{1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2}$$

TAPA 2

Eksponenttifunktion sarjakehitelmä:

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \ldots$$

Valitaan mukaan termit, joiden asteluku on korkeintaan 2, ja sijoitetaan $t = x + 2y$.

$$e^{x+2y} \approx 1 + (x+2y) + \frac{1}{2!}(x+2y)^2$$

$$= 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot 4xy + \frac{1}{2}\cdot 4y^2$$

$$= \underline{1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2 = P_2(x,y)}$$

K2 VK2

2) a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \sin(x^2)\, dy\, dx$

$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \Big/_0^{x} y \sin(x^2)\, dx$

$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(x \sin(x^2) - 0 \cdot \sin(x^2) \right) dx$

$= \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$

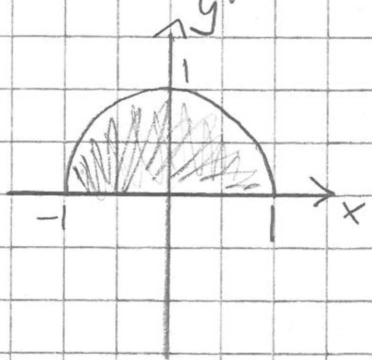
$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin(x^2)\, dx$

$= \frac{1}{2} \Big/_0^{\sqrt{\pi}} -\cos(x^2)$

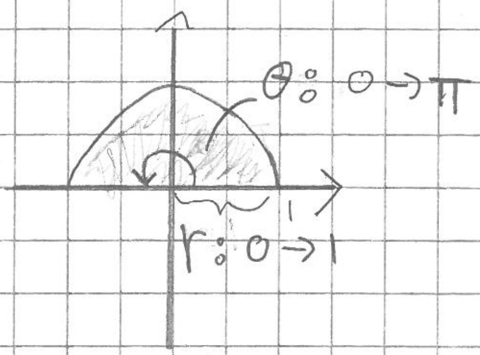
$= \frac{-1}{2} \left[\cos(\sqrt{\pi}^2) - \cos(0^2) \right]$

$= \frac{-1}{2} (-1 - 1) = \frac{-1}{2} \cdot (-2) = \frac{2}{2} = 1$

2b) $\iint_D y\,dA$ D on puolikiekko $x^2+y^2 \le 1$, $y \ge 0$



polaarimuotoon:



$y = r\sin\theta$
$dA = r\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1} r\sin\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{1} r^2\,dr$$

$$= \Big/_0^{\pi} (-\cos\theta)\ \Big/_0^{1} \frac{1}{3}r^3$$

$$= \Big[\underbrace{-\cos(\pi)}_{=1} - \underbrace{(-\cos(0))}_{-1}\Big] \cdot \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3\right)$$

$$= (1-(-1)) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3) a) $\iiint_R xy\cos z \, dV$

R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\cos z \, dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^2 y\,dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z \, dz$$

$$= \Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2 \Big/_0^2 \frac{1}{2}y^2 \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \sin z$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right]\cdot\left[\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

3b) $\iiint_D z \, dV \quad D: y \geq 0, \; z \geq 0, \; x^2+y^2+z^2 \leq 4$

pallokoordinaatteihin:

$x^2+y^2+z^2 \leq 4 \Rightarrow \rho^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2$

$y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi \qquad (\rho \geq 0 \text{ aina})$

$z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

$z = \rho \cos\phi \qquad dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \, d\phi \int_0^{2} \rho^3 \, d\rho$$

$$= \Big/_0^{\pi} \theta \; \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos^2\phi\right) \; \Big/_0^{2} \frac{1}{4}\rho^4$$

tai

$\left(\frac{1}{2} \cdot \sin^2\phi\right)$ tai $\left(-\frac{1}{4}\cos(2\phi)\right)$

$$= \left[\pi - 0\right] \cdot \left[\underbrace{-\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \left(\underbrace{-\frac{1}{2}\cos^2(0)}_{=-\frac{1}{2}}\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4\right]$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \underline{\underline{2\pi}}$$

1.4a) Onko vektorikenttä $\bar{F}(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$ konservatiivinen?

TAPA 1

$\nabla \times \bar{F} = \bar{0}$ on välttämätön, muttei riittävä ehto konservatiivisuudelle. Tutkitaan, toteutuuko se.

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial y}0}_{0} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial z}x}_{0}\Big) - \hat{j}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x}0}_{0} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial z}(-y)}_{0}\Big) + \hat{k}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x}x}_{1} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial y}(-y)}_{-1}\Big)$$

$= 2\hat{k} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{F}$ ei ole konservatiivinen.

TAPA 2

Kenttä on konservatiivinen, jos sillä on skalaaripotentiaali ϕ s.e. $\bar{F} = \nabla\phi$. Yritetään etsiä ϕ.

$$\bar{F} = \nabla\phi = \frac{\partial}{\partial x}\phi\,\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\phi\,\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} -y = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & (1) \\ x = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \int d\phi = \int -y\,dx \Rightarrow \phi = -yx + C(y)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -x + C'(y) \quad (3)$

$(2)\&(3) \Rightarrow x = -x + C'(y) \Rightarrow \dfrac{dC}{dy} = 2x \Rightarrow C(y) = \int 2x\,dy = 2xy$

Yllä saatiin, että $C(y)$ olisi riippuvainen myös x:stä. Tämä on ristiriita, eikä haluttua potentiaalia ϕ siis ole. $\Rightarrow$ Kenttä $\bar{F}$ ei ole konservatiivinen.

b) Helix-käyrän $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ kaarenpituus, kun $t \in [0, 4\pi]$:

Käyrän kaarenpituus polun C yli on $\ell(C) = \int_C 1\,ds = \int_a^b \|\bar{r}\,'(t)\|\,dt$, missä $\bar{r}(t)$ on käyrän parametrisoitu esitys

Nyt $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \Rightarrow \bar{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

ja $\|\bar{r}\,'(t)\| = \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{1} + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\underline{\ell} = \int_0^{4\pi} \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,\Big/_0^{4\pi} t = \underline{4\sqrt{2}\,\pi}$$