

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

1. välikoe 22.2.2011 klo 16–19.

Ei laskimia eikä taulukoita.

1. Funktio  $f$  on  $2\pi$ -jaksollinen ja  $f(x) = e^{-ix/2}$ , kun  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Määritä funktion  $f$  kompleksiset Fourier-kertoimet  $c_n$ .
2. a) Selitä lyhyesti, miten  $2\pi$ -jaksollisen funktion Fourier-kerrointen  $c_n$  lauseke johdetaan (formaalisti) käyttämällä funktioiden  $e_n(x) = e^{inx}$  ortogonaalisuutta  $L^2$ -sisätulon suhteen.  
b) Johda kaava  $\widehat{u'}(x)(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$ , kun  $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ja  $u'$  ovat sileitä ja  $L^1$ -integroituvia.
3. a) Osoita, että differentiaaliyhtälön  $u'' + 2u' + u = f(x)$  ratkaisu voidaan kirjoittaa Fourier-puolella muodossa  $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ , kun  $f \in L^1(\mathbf{R})$  ja

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{(1+i\xi)^2}.$$

b) Määritä funktio  $g(x)$  jollakin tavalla ja esitä ratkaisu  $u = u(x)$  konvoluution avulla.

4. Tarkastellaan vaimennettua aaltoyhtälöä

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \text{ (huomaa derivaatta!)} \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

jossa  $0 < \alpha < c/2$ . Johda muuttujien separointia käyttämällä muotoa

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} (A_n \cos(\beta_n t) + B_n \sin(\beta_n t)) \sin(\lambda_n x)$$

oleva formaali ratkaisukaava, määritä kertoimien  $\lambda_n, \beta_n$  lausekkeet sekä kertoimet  $A_n, B_n$  funktion  $f$  avulla lausuttuina.

Sekalaisia kaavoja:

- $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}, \widehat{fg} = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}$ .
- $\hat{h}(\xi) = 1/(a + i\xi)$ , kun  $h(x) = H(x)e^{-ax}$ ,  $a > 0$  ja

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$