Matematiikka
Aalto-yliopisto

Varpanen / Häme

# Mat-1.1220 Matematiikan peruskurssi S2

## 2. välikoe 28.3.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

**Ei laskimia eikä taulukkokirjoja!** Koeaika on kolme tuntia.

1. Tarkastellaan funktiota $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$F(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$$
pisteen $(1,1,1)$ ympäristössä. Voidaanko tasa-arvopinta $F(x,y,z) = 0$ esittää muodossa $x = f(y,z)$? Jos voidaan, laske $\nabla f(1,1)$.

**Ratkaisu.** Lasketaan funktion $F$ osittaisderivaatat: $\nabla F(x,y,z) = (3x^2, -4y, 2z)$, josta $\nabla F(1,1,1) = (3,-4,2)$. Koska $D_xF(1,1,1) = 3 \neq 0$, niin implisiittifunktiolauseen nojalla tasa-arvopinta $F(x,y,z) = 0$ voidaan esittää muodossa $x = f(y,z)$. Edelleen implisiittifunktion derivointikaavasta
$$\frac{\partial}{\partial y} f(1,1) = -\frac{D_yF(1,1,1)}{D_xF(1,1,1)} = \frac{4}{3}$$
ja
$$\frac{\partial}{\partial z} f(1,1) = -\frac{D_zF(1,1,1)}{D_xF(1,1,1)} = \frac{-2}{3},$$
ts. $\nabla f(1,1) = (4/3, -2/3)$.

2. a) Etsi funktion $f(x,y) = x+y$ ääriarvot suljetussa yksikkökiekossa $x^2+y^2 \leq 1$. Perustele tarkasti.

   b) Etsi Lagrangen menetelmällä funktion $f(x,y) = x+y^2$ ääriarvot käyrällä $2x^2+y^2 = 1$.

**Ratkaisu.** a) Funktio $f$ on jatkuva ja suljettu yksikkökiekko on suljettu, joten ääriarvot löytyvät. Koska $f$ on derivoituva kaikkialla ja $\nabla f(x,y) = (1,1) \neq (0,0)$ kaikilla $(x,y)$, niin kiekon sisällä ei ole ääriarvokohtia. Parametrisoidaan kiekon reuna: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Tällöin funktio $g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = \cos t + \sin t$ on derivoituva suljetulla välillä $[0, 2\pi]$, joten sen ääriarvot löytyvät joko derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä. Nyt $g(0) = g(2\pi) = 1$ ja $g'(t) = -\sin t + \cos t = 0$, kun $\sin t = \cos t$ eli kun $t = \pi/4$ tai $t = 5\pi/4$. Näissä kohdissa $g(\pi/4) = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ja $g(5\pi/4) = -1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$. Siten kysytyt ääriarvot ovat $\sqrt{2}$ (maksimi kohdassa $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$) ja $-\sqrt{2}$ (minimi kohdassa $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$).

b) Ääriarvokohdat löytyvät käyrän kohdista, joissa $\nabla f = \lambda \nabla g$ jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$. Koska $\nabla f = (1, 2y)$ ja $\nabla g = (4x, 2y$, niin saadaan yhtälöryhmä
$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 4x \\ 2y = \lambda \cdot 2y \\ 2x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
Keskimmäisestä yhtälöstä: jos $y \neq 0$, niin $\lambda = 1$ ja edelleen (ylimmästä) $x = 1/4$ ja (alimmasta) $y = \sqrt{7/8}$. Tällöin $f(x,y) = 1/4 + 7/8 = 9/8$. Toinen vaihtoehto on $y = 0$, jolloin (alimmasta) $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Tällöin $f(x,y) = \pm 1/\sqrt{2}$. Siten maksimi on $9/8$ (kohdassa $x = 1/4$, $y = \sqrt{7/8}$) ja minimi on $-1/\sqrt{2}$ (kohdassa $x = -1/\sqrt{2}$, $y = 0$).

3. Olkoon $0 < a < 1$. Laske pallokoordinaatteja käyttämällä funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

integraali yli origokeskisen, $(1 - a)$-paksuisen pallokuoren, jonka sisäsäde on $a$ ja ulkosäde 1. Mitä tapahtuu, kun $a \to 0$?

**Ratkaisu.** Huomataan, että pallokoordinaateissa $f = 1/\rho$ ja pallokuori on $a \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Siten (muistetaan myös suurennussuhde integraalissa)

$$\begin{aligned}\iiint f\ dV &= \int_a^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \cdot \rho^2 \sin\varphi\ d\theta\ d\varphi\ d\rho \\ &= 2\pi \int_a^1 \rho \int_0^\pi \sin\varphi\ d\varphi\ d\rho = 4\pi \int_a^1 \rho\ d\rho = 2\pi \Big|_a^1 \rho^2 = 2\pi(1 - a^2).\end{aligned}$$

Kun $a \to 0$, niin tämä lähestyy lukua $2\pi$. (Funktion integraali siis pysyy rajoitettuna, vaikka funktio itse on rajoittamaton origon ympäristössä.)

4. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ alue, jota rajoittavat tasot $y = 1$, $y = -x$, $x = 0$, $z = 0$ ja $z = -x$.

   a) Laske avaruusintegraali
   $$\iiint_D e^{x+y+z}\ dz\ dy\ dx.$$

   b) Sanotaan, että alueen $D$ *pohjan* määrää taso $z = 0$ ja *kannen* taso $z = -x$. Laske alueen $D$ kannen pinta-ala.

**Ratkaisu.** a)

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^0 \int_{-x}^1 \int_0^{-x} e^x e^y e^z\ dz\ dy\ dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 (e^y - e^x e^y)\ dy\ dx \\ &= \int_{-1}^0 (e^1 - e^{-x} - e^{x+1} + e^0)\ dx \\ &= 3 - e.\end{aligned}$$

b) Tässä $z = f(x, y) = -x$, josta $D_x f = -1$, $D_y f = 0$ ja $\sqrt{1 + (D_x f)^2 + (D_y f)^2} = \sqrt{2}$. Siten kysytty ala on

$$\sqrt{2} \int_{-1}^0 \int_{-x}^1\ dy\ dx = \ldots = 3\sqrt{2}/2.$$