Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila/Quach

Mat-1.1230 peruskurssi S3 Syksy 2010

2. välikoe Ti 16.11.2010 klo 16.00-19.00

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y_{n+2} - \frac{1}{4}y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad y_0 = y_1 = 0.$$

2. (a) Olkoon $f(t)$ parillinen funktio ja $c > 0$. Osoita, että

$$\int_{-c}^{c} f(t)\,dt = 2\int_0^c f(t)\,dt.$$

(b) Määritä funktion $f(t) = |t|$, kun $t \in [-T/2, T/2]$ ja $f(t+T) = f(t)$ Fourier-sarja.

3. (a) Anna määritelmä funktion $f(t)$ Fourier-muunnokselle ja Fourier-muunnoksen $\hat{f}(\omega)$ käänteismuunnokselle.

(b) Laske suoraan määritelmää käyttäen funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & t < 0 \quad (k > 0), \\ 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

4. Laske matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Cholesky-hajotelma $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$.

Vihje: Viereisellä sivulla olevat kaavat voivat virkistää muistia.

SAMU

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z), \; Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0), \; Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$

Gram-Schmidt:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$v_1 = a_1 \tag{1}$$

$$q_1 = \frac{v_1}{||v_1||} \tag{2}$$

$$v_{k+1} = a_{k+1} - \langle a_{k+1}, q_1\rangle q_1 - \ldots - \langle a_{k+1}, q_k\rangle q_k \tag{3}$$

$$q_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{||v_{k+1}||} \tag{4}$$

$$\to \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$