Matematiikan laitos
Aalto-yliopisto. Perustieteiden korkeakoulu

Pitkäranta/Hiltunen

# Mat-1.1020 Peruskurssi L2

## Välikoe 2 28.03.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. a) Näytä matriisialgebran keinoin, että jos $\mathbf{A}$ on kokoa $n \times n$ ja yhtälöryhmällä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ on ratkaisu jokaisella $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, niin on olemassa neliömatriisi $\mathbf{B}$ siten, että $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.
   b) Matriisilla
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
   on ominaisuus: $\lambda\mathbf{A}$ on ortogonaalinen eräällä $\lambda \in \mathbb{R}$. Määritä tätä tietoa hyväksi käyttäen vaakavektori $\mathbf{x}^T$ siten, että $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = [7, 13, -3, -9]$.

2. Osoita lineaarikuvaus
$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
   peilaukseksi erään suoran suhteen ja määritä suoran yhtälö.

3. Avaruustaso $T$ sivuaa pintaa
$$S: \int_0^1 \frac{e^{xzt}}{x - y + z + t}\, dt = \ln 2$$
   pisteessä, joka on positiivisella $z$-akselilla. Määritä $T$:n yhtälö.

4. Haluttaessa määrätä käyrän $S: y = x^3$ piste $P = (x, y)$, joka on lähinnä pistettä $Q = (3, 0)$, eräs keino on minimoida $|PQ|^2$ huomioiden rajoitusehto $(x, y) \in S$ Lagrangen kertojan ($\lambda$) avulla. Muodosta tämän menettelyn mukainen yhtälöryhmä tuntemattomille $x, y, \lambda$. Eliminoi $\lambda$ ja ratkaise jäljelle jäänyt yhtälöryhmä likimäärin ottamalla alkuarvaukseksi $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ja tarkentamalla tämä yhdellä 2-ulotteisen Newtonin iteraation askeleella.

Institutionen för matematik
Aalto-universitet. Högskolan för teknikvetenskaper

Pitkäranta/Hiltunen

# Mat-1.1020 Grundkurs L2

## Mellanförhör 2 28.03.2011

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. a) Visa med hjälp av metoder från matrisalgebran, att om $\mathbf{A}$ är av typ $n \times n$ och ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, så finns det en kvadratisk matris $\mathbf{B}$ sådan att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.
   b) Matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
   har egenskapen: $\lambda\mathbf{A}$ är ortogonal för ett visst $\lambda \in \mathbb{R}$. Använd den informationen för att bestämma en radvektor $\mathbf{x}^T$ sådan att $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = [7, 13, -3, -9]$.

2. Visa att den linjära avbildningen
$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
   är en spegling i en linje samt bestäm denna linjes ekvation.

3. Planet $T$ i rummet tangerar ytan
$$S: \int_0^1 \frac{e^{xzt}}{x - y + z + t}\, dt = \ln 2$$
   i en punkt som är på positiva $z$-axeln. Bestäm $T$:s ekvation.

4. Om man vill bestämma punkten $P = (x, y)$ på kurvan $S : y = x^3$, som är närmast punkten $Q = (3, 0)$, så är en metod att minimera $|PQ|^2$ under bivillkoret $(x, y) \in S$ med hjälp av Lagrange multiplikator ($\lambda$). Bilda ekvationssystemet för de obekanta storheterna $x, y, \lambda$, som fås via denna metod. Eliminera $\lambda$ och lös det återstående ekvationssystemet approximativt genom att använda begynnelsevärdet $(x_0, y_0) = (1, 1)$ och förbättra detta genom att använda den 2-dimensionella Newton–iterationen ett steg.