Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2

Heikkinen/Tikanmäki

Kolmas välikoe 16.05.2011

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksiin hyväksyttyä laskinta.
Sivun kääntöpuolelta löytyy integrointikaavoja.

1. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$.

   a) Laske kentän $\mathbf{F}$ divergenssi ja roottori.

   b) Laske kentän $\mathbf{F}$ vuo läpi kuution $0 \leq x, y, z \leq 1$ pinnan ulospäin.

2. a) Ratkaise alkuarvotehtävä $y' + 3x^2y = e^{-x^3}\cos x, \quad y(0) = 1$.

   b) Ratkaise alkuarvotehtävä $y' = xe^{-y}, \quad y(0) = 0$.

3. a) Määrää differentiaaliyhtälön $y'' - y' - 2y = 0$ yleinen ratkaisu.

   b) Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - y' - 2y = x$ yksittäisratkaisu.
   (Vihje: ratkaisu löytyy muotoa $y = ax + b$ olevalla yritteellä.)

   c) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' - y' - 2y = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

4. a) Laske elliptisen kiekon $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ pinta-ala soveltamalla Greenin lausetta vektorikenttään $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

   b) Osoita sopivia testejä käyttäen, että sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

   suppenevat.

Integrointikaavoja

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot\ dr$$

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot\ dr$$

K2 VK3 16.5.2011 ratkaisut tehtäviin 1 ja 2

1.tehtävä

a) Vektorikentän $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ divergenssi on

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

ja roottori on

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Tässä $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$, joten divergenssiksi saadaan

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(x^2yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(xyz^2)}{\partial z} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = \underline{\underline{6xyz}}.$$

ja roottoriksi

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\left(xz^2 - xy^2\right)\mathbf{i} + \left(x^2y - yz^2\right)\mathbf{j} + \left(y^2z - x^2z\right)\mathbf{k}}}.$$

b) Käytetään hyväksi Gaussin lausetta:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 6xyz\, dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \Big|_0^1 3x^2yz\, dydz = \int_0^1 \int_0^1 3yz\, dydz = \int_0^1 \frac{3}{2}z\, dz = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}. \end{aligned}$$

Luonnollisesti tehtävän voi ratkaista myös summaamalla yhteen vuot jokaisen kuution seinän läpi.
Pisteytys: 3 pistettä a- ja b-kohdista. a-kohdasssa yleisimmät virheet olivat divergenssin ilmoittaminen vektorina ja merkkivirhe roottorin j-komponentissa. Jos virheistä oli vain jompikumpi, sai kaksi pistettä. b-kohdassa järkevästä lähestymistavasta sai 1 pisteen ja oikeasta laskusta 2 pistettä.

2.tehtävä

a) Ensimmäisen kertaluvun vakiokertoiminen DY, joka on muotoa $y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$ ratkeaa integroivan tekijän $e^{\int p(x)dx}$ avulla.

$$\begin{aligned}
y'(x) + p(x)y(x) &= r(x) \quad \Big| \cdot e^{\int p(x)dx} \\
y'(x)e^{\int p(x)dx} + p(x)y(x)e^{\int p(x)dx} &= r(x)e^{\int p(x)dx} \\
\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y(x)e^{\int p(x)dx}) &= r(x)e^{\int p(x)dx} \\
y(x)e^{\int p(x)dx} &= \int r(xe^{\int p(x)dx}\ dx + C \\
y(x) &= Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int r(x)e^{\int p(x)dx}\ dx
\end{aligned}$$

Tässä $p(x) = 3x^2$ ja $r(x) = e^{-x^3}\cos x$, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$y(x) = Ce^{-x^3} + e^{-x^3} \int \cos x\ dx = (C + \sin x)e^{-x^3}.$$

Sijoitetetaan alkuarvo ja ratkaistaan vakio:

$$y(0) = C = 1.$$

Lopullinen ratkaisu:

$$y(x) = \underline{\underline{(1 + \sin x)e^{-x^3}}}.$$

b) Kyseessä on separoituva differentiaaliyhtälö.

$$\begin{aligned}
y' &= xe^{-y} \\
\frac{dy}{dx} &= xe^{-y} \\
\Rightarrow \int e^y\ dy &= \int x\ dx \\
e^y &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
y &= \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)
\end{aligned}$$

Ratkaistaan vakio alkuarvosta:

$$y(0) = \ln C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Lopullinen ratkaisu:

$$y = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)$$

Pisteytys: 3 pistettä a- ja b-kohdista. a-kohdasssa yleisin virhe oli yhdistää termi e^{-x^3} vakioon C, jolloin vastaukseksi tuli $1 + \sin(x)e^{-x^3}$. Termi e^{-x^3} ei ole vakio, koska se sisältää x:n. Tästä lähti 1 piste, jos tehtävä oli muuten oikein. b-kohdassa virheet liittyivät yleisimmin logaritmin käyttöön. Useimmiten todettiin, että $y = \ln \frac{1}{2}x^2 + \ln C$, mikä johtaa mahdottomaan alkuehtoon. Tästä virheestä menetti 2 pistettä, jos tehtävän jätti kesken tai ratkaisi loppuun väärin. Mahdottoman alkuehdon havaitseminen ja tuloksen perusteleminen aiheutti vain 1 pisteen menetyksen. Toinen tyypillinen virhe oli sotkea $\ln 0$ ja $\ln 1$.

Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2
Kolmas välikoe 16.05.2011

Malliratkaisut tehtäviin 3 ja 4

3. a) Differentiaaliyhtälön $y'' - y' - 2y = 0$ karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Sen juuret ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 2$. Täten DY:n ratkaisuksi saadaan

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

b) Sijoitetaan yrite $y = ax + b$ differentiaaliyhtälöön $y'' - y' - 2y = x$. Tällöin saadaan

$$-a - 2(ax + b) = -a - 2b - 2ax = x \Longrightarrow \begin{cases} -a - 2b = 0, \\ -2a = 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Siten yksittäisratkaisuksi saadaan

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

c) DY:n $y'' - y' - 2y = x$ yleiseksi ratkaisuksi saadaan a-kohdan mukaisen homogeenisen yhtälön ratkaisun ja b-kohdan yksittäisratkaisun lineaarikombinaatio, eli

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Vakiot A ja B saadaan määrättyä alkuehdoista

$$\begin{cases} y(0) = A + B + \frac{1}{4} = 1, \\ y'(0) = -A + 2B - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

Täten alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{5}{12}e^{2x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Pisteytys: Jokaisesta kohdasta saa kaksi pistettä. a-kohdassa karakteristisen yhtälön juurista saa yhden pisteen. b-kohdassa yritteen sijoittaminen differentiaaliyhtälöön ja yhtälön muodostaminen vakioille a ja b oikeuttaa yhteen pisteeseen. c-kohdasta sai pisteen, jos osasi muodostaa DY:n yleisen ratkaisun a- ja b-kohtien ratkaisujen avulla.

4. a) Elliptisen kiekon

$$D = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \right\}$$

positiivisesti suunnistettu reunakäyrä C voidaan parametrisoida seuraavasti

$$C = \left\{ \mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j} : 0 \le t \le 2\pi \right\}.$$

Greenin lauseella saadaan

$$\text{ala}(D) = \iint_D 1\,dA = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

$$= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-3\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}) \cdot (-2\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j})\,dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = 3\int_0^{2\pi} dt = 6\pi.$$

b) Olkoon $a_k = \frac{k}{3^k}$, joten $a_k \ge 0$ kun $k \in \mathbf{Z}_+$. Suhdetestin nojalla saadaan

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} < 1,$$

joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ suppenee.

Olkoon $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Tällöin $f(k) = \frac{1}{k^3}$, $\forall k \in \mathbf{Z}_+$, lisäksi f on jatkuva ja saa epänegatiivisia arvoja, kun $x \in [1, \infty)$. Koska

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^3} = \lim_{M\to\infty} \Big/_1^M -\frac{1}{2x^2} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) = \frac{1}{2} < \infty,$$

joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ suppenee integraalitestin nojalla.

Pisteytys: a-kohdasta sai kaksi ja b-kohdasta neljä pistettä. a-kohdasta sai pisteen, jos osasi näyttää, että Greenin lauseella saa pinta-alan laskettua viivaintegraalista. b-kohdassa sopivan testin valinta tuotti kummassakin tapauksessa yhden pisteen, perusteluista sai toisen.