Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Havola

Mat-1.1310 Matematiikan peruskurssi C2

3. välikoe 16.5.2011

Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja.

1. Pelikortit 1–10 ladotaan kahteen riviin 2×5-matriisiksi, kerätään riveittäin ja jaetaan samaan muotoon sarakkeittain, jolloin syntyy alla olevan kuvion mukainen permutaatio $\alpha \in S_{10}$, jossa esimerkiksi $\alpha(2) = 3$. Määritä permutaation α sykliesitys ja merkki $\operatorname{sgn} \alpha$. Kuinka monta kertaa operaatio täytyy toistaa, jotta kortit palautuvat alkuperäiseen asemaansa?

1	*2*	*3*	*4*	*5*
6	*7*	*8*	*9*	*10*

$\longrightarrow$

1	*3*	*5*	*7*	*9*
2	*4*	*6*	*8*	*10*

2. Neliön muotoiselle pahvikortille piirrettyyn 4×4-ruudukkoon tehdään kaksi reikää ruutujen keskelle. Kuinka monta olennaisesti erilaista reikäkorttia näin voidaan tehdä? Kortin molemmat puolet ovat samanlaiset, joten se voidaan myös kääntää nurin.

3. Määritä palautuskaavan $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0$ ratkaisu alkuehdoilla $a_0 = 0,\ a_1 = 3$.

4. Lukujonolle (a_n) pätee $a_{n+1} = 2a_n - 1$ ja $a_0 = 3$. Määritä jonon generoiva funktio
$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
ja sen avulla yleisen termin a_n lauseke.

Huom: Yhden välikokeen voi uusia tentin yhteydessä 27.5.2011, jolloin parempi tulos jää voimaan. **Myös kaikkien uusintavälikokeeseen osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin!** Tentti ja välikoeuusinnat ovat samalla paperilla ja niistä voi valita yhden välikokeen tai tentin.

1. Playing cards from 1 to 10 are arranged as a 2×5-matrix, collected by rows, and rearranged by columns to obtain a permutation $\alpha \in S_{10}$ as in the figure below; e.g. $\alpha(2) = 3$. Find the cycle representation and the sign of α. How many times should this operation be repeated in order to restore the original arrangement of the cards?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

$\longrightarrow$

1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

2. A 4×4 grid is drawn on a square card and two of the smaller squares are punctured. How many essentially different cards can be obtained in this way? Both sides of the card are similar, so that it can also be turned over.

3. Find a solution to the recursion $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0$ with the initial conditions $a_0 = 0,\ a_1 = 3$.

4. A sequence (a_n) satisfies $a_{n+1} = 2a_n - 1$ and $a_0 = 3$. Find the generating function

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

and use it to determine an expression for a_n.