

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

tentti 18.5.2011

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 4h.

Valitse 5 tehtävää.

1. Ratkaise lineaarinen differentiaaliyhtälösystemi

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

2. Laske matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

singulaariarvot σ_i sekä (vasen- ja oikea-) singulaarivektorit. Esitä tulos singulaarihajotelman muodossa $A = U\Sigma V^T$.

3. Katsotaan (epälineaarista) differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 - x_2^2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

(a, 1p) Määritä kriittiset pisteet ($x' = 0$)

(b, 4p) Linearisoi (1) kriittisissä pisteissä ja luokittele kunkin tyyppi ja stabiilius.

(c, 1p) Voidaanko (b)-kohdan tuloksista päätellä yhtälön (1) stabiiliudet? Perustele lyhyesti.

4. Etsi pienimmän neliösumman ratkaisu tehtävälle $Az = c$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad c = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

5. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Laplace-muunnoksella.