6. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$x' = tx^2, \quad x(0) = 1$$

numeerisesti aikavälillä $0 \leq t \leq 1$

(a) Eulerin menetelmällä, askelpituus $h = 0.25$.

(b) Parannellulla Eulerilla, askelpituus $h = 0.5$.

(c) Runge-Kutalla, askelpituus $h = 1$.

Esitä tulokset yhtenä taulukkona, jossa 1. sarake $t^{(k)}$ ja 2.-4. sarakkeet (a)-(c) $x^{(k)}$:t.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Annettu $f(t)$, merkitään $F = \mathcal{L}f$, eli $F(s) = \int_0^\infty \ldots (?) \ldots \, dt$.

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g),$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}f(s/a).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$

Numeerisia menetelmiä yhtälölle $x' = F(x,t)$:

- Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + hF(x^{(k-1)}, t^{(k-1)})$.
- Implisiittinen Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + hF(x^{(k)}, t^{(k)})$.
- Paranneltu Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{h}{2}\Big(c_1 + c_2\Big)$, missä

$$c_1 = F(x^{(k-1)},\, t^{(k-1)}),$$
$$c_2 = F(x^{(k-1)} + hc_1,\, t^{(k-1)} + h).$$

- Runge-Kutta: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{h}{6}\Big(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4\Big)$, missä

$$c_1 = F(x^{(k-1)},\, t^{(k-1)}),$$
$$c_2 = F(x^{(k-1)} + \frac{1}{2}hc_1,\, t^{(k-1)} + \frac{1}{2}h),$$
$$c_3 = F(x^{(k-1)} + \frac{1}{2}hc_2,\, t^{(k-1)} + \frac{1}{2}h),$$
$$c_4 = F(x^{(k-1)} + hc_3,\, t^{(k-1)} + h).$$