Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Kinnunen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4, kevät 2009

1. välikoe, 26.2.2009

1. Tarkastellaan funktiota $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun} \quad -\pi \le x < 0, \\ 1, & \text{kun} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Laske funktion f Fourierin kertoimet $\widehat{f}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

2. (a) Laske funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$, Fourierin muunnos.

(b) Perustele lyhyesti, miksi kaava

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+\xi^2} e^{ix\xi} \, d\xi$$

pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

3. (a) Miten määritellään funktioiden $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ konvoluutio $f * g$?

(b) Johda kaava $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

4. Tutki ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia. Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää ja jos väite on epätosi, niin perustele vastauksesi lyhyesti.

(a) Funktiot $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = 1$ ja $g(t) = e^{-it}$ ovat ortogonaalisia avaruuden $L^2([-\pi, \pi])$ sisätulon suhteen.

(b) Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = 5e^{3it} + 3e^{-5it}$, Fourierin sarja suppenee pisteessä 0.

(c) On olemassa sellainen funktio $f \in L^2([-\pi, \pi])$, että $\widehat{f}(j) = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}$.

(d) Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on sellainen funktio, että $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$, niin $\widehat{f}(0) = 1$.

(e) On olemassa sellainen funktio $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, että $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = 1$ ja $\widehat{f}(1) = 100$.

(f) Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on sellainen funktio, että $\widehat{f}(\xi) = e^{-|\xi|^2}$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = -2\xi_j e^{-|\xi|^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$