Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Kinnunen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4, kevät 2009

2. välikoe, 31.3.2009

1. (a) Oletetaan, että $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ovat harmonisia funktioita. Näytä, että funktio $2u + 5v$ on harmoninen joukossa $\mathbb{R}^n$.

   (b) Olkoon $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$,
$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dy,$$
   missä $g \in C(\partial\mathbb{R}^n_+)$ on rajoitettu funktio ja $\alpha(n)$ on yksikköpallon tilavuus avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Minkä ongelman ratkaisu funktio u on? Pelkkä ongelman täsmällinen muotoilu riittää – ei tarvitse todistaa, että u todella on ongelman ratkaisu.

2. (a) Muotoile maksimiperiaate Laplacen yhtälön ratkaisuille.

   (b) Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu joukko, $g \in C(\partial\Omega)$ ja $f \in C(\Omega)$. Todista maksimiperiaatteen avulla, että Dirichletin ongelmalla
$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{kun} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & \text{kun} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$
   on korkeintaan yksi ratkaisu $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

3. (a) Olkoon $\Phi : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$
   Näytä, että Φ on lämpöyhtälön ratkaisu joukossa $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

   (b) Luettele sanallisesti neljä pääkohtaa argumentista, jolla johdetaan ratkaisukaava
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy$$
   lämpöyhtälön Cauchyn ongelmalle Fourierin muunnoksen avulla joukossa $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

4. Oletetaan, että $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ja määritellään
$$U(x,r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y),$$
   missä $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$.

   (a) Näytä, että $\lim_{r \to 0} U(x,r) = u(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Näytä, että
$$\frac{\partial U}{\partial r}(x,r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy$$
   kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.