

Laskin sallittu. Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Osatehtävien painoarvo on yhtäsuuri ellei painoja ole erikseen annettu.

Tehtävät

1. Ratkaise kongruenssiyhtälö

$$5x \equiv 19 \pmod{31}.$$

2. Osoita, että kokonaislukujen $a, b \in \mathbb{Z}$ kongruenssi modulo $m \in \mathbb{Z}$

$$a \equiv b \pmod{m}$$

on ekvivalenssirelaatio.

3. Etsi yhtälöryhmän $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kaikki ratkaisut parametrien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ kaikilla arvoilla.

4. Suunnistamattomassa graafissa $G = (V, E)$ on v kärkeä, joista yksi on parillista ja muut paritonta astetta. Mitä voidaan sanoa paritonta astetta olevien kärkien määrästä komplementissa \bar{G} ?

5. Määritä integraalit

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

ja

$$\int_{\arctan(-1)}^{\arctan(1)} \sin^2 x dx + \int_{\arctan(-1)}^{\arctan(1)} \cos^2 x dx.$$

6. Määritä tasojen $2x - y + 2z = 5$ ja $2x + 3y - 5z + 7 = 0$ yhteiset pisteet.

