

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 10.01.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Näytä, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Neliömatriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ on kokoa 4×4 ja

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{kun } i = j \\ 1, & \text{kun } j = 1 \text{ ja } i \neq j \\ 3, & \text{kun } (i, j) = (1, 2) \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä \mathbf{A} :n a) LU -hajotelma, b) spektri (= ominaisarvot).

3. Laske $y(0)$ ja $y'(0)$, kun $y(x)$ määritellään pisteen $x = 0$ ympäristössä kaavalla

$$\int_0^1 \frac{e^{xyt}}{x + y + t} dt = 1.$$

4. Janan AB päätepiste A on xy -tason piste $(x_1, x_2, 0)$ ja päätepiste B on yz -tason piste $(0, x_3, x_4)$.

a) Laske $\nabla f(6, 3, -3, 3)$, missä $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ on janan AB pituus.

b) Olkoon $A = (6, 3, 0)$ ja $B = (0, -3, 3)$. Siirretään A pisteeseen A' , joka on A :sta etäisyydellä 0.01 suuntaan $\frac{1}{5}(-3\vec{i} + 4\vec{j})$ ja B pisteeseen B' , joka on B :stä etäisyydellä 0.02 suuntaan $\frac{1}{5}(-4\vec{j} + 3\vec{k})$. Approksimoi janojen $A'B'$ ja AB pituuksien erotus differentiaalilin avulla.

5. Laske pallokoordinaatteihin siirtymällä integraali

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z|}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz.$$

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Tentamen 10.01.2011

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Näytä, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Neliömatriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ on kokoa 4×4 ja

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{kun } i = j \\ 1, & \text{kun } j = 1 \text{ ja } i \neq j \\ 3, & \text{kun } (i, j) = (1, 2) \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä \mathbf{A} :n a) LU -hajotelma, b) spektri (= ominaisarvot).

3. Laske $y(0)$ ja $y'(0)$, kun $y(x)$ määritellään pisteen $x = 0$ ympäristössä kaavalla

$$\int_0^1 \frac{e^{xyt}}{x + y + t} dt = 1.$$

4. Janan AB päätepiste A on xy -tason piste $(x_1, x_2, 0)$ ja päätepiste B on yz -tason piste $(0, x_3, x_4)$.

a) Laske $\nabla f(6, 3, -3, 3)$, missä $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ on janan AB pituus.

b) Olkoon $A = (6, 3, 0)$ ja $B = (0, -3, 3)$. Siirretään A pisteeseen A' , joka on A :sta etäisyydellä 0.01 suuntaan $\frac{1}{5}(-3\vec{i} + 4\vec{j})$ ja B pisteeseen B' , joka on B :stä etäisyydellä 0.02 suuntaan $\frac{1}{5}(-4\vec{j} + 3\vec{k})$. Approksimoi janojen $A'B'$ ja AB pituuksien erotus differentiaalin avulla.

5. Laske pallokoordinaatteihin siirtymällä integraali

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z|}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz.$$