

Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1

Tentti 19.5.2010 klo 9–13

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ✱-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia, taulukoita tai muita apuvälineitä. Koeaika on 4 tuntia.

1. Kun $p, q, t \in \mathbb{R}$, määritellään matriisi $M(p, q, t) = \begin{bmatrix} 1 & p & t \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Laske matriisien tulo

$$M(a, b, c) M(d, e, f)$$

ja totea, että se on muotoa $M(x, y, z)$ eräillä luvuilla $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Laske matriisin $M(p, q, t)$ käänteismatriisi.

2. a) Olkoon $r \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Todista, että $(1 - r) \sum_{k=1}^n r^k = r - r^{n+1}$.

b) Olkoon $|r| < 1$. Todista, että $\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1 - r}$.

3. Määritellään $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & \text{kun } x \neq 0. \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

a) Laske $f'(x)$, kun $x \neq 0$.

b) Laske $f'(0)$.

4. a) Sijoita $u = \ln(x)$ integraaliin

$$\int_1^e x^{15} (\ln(x))^{10} dx$$

— näin saatua integraalia ei tarvitse laskea.

b) Laske

$$\int_0^{\infty} e^{-3x} \sin(5x) dx.$$

5. a) Laske osamurtokehitemää käyttäen

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2 - 5x} dx.$$

b) Laske kuulan

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

tilavuus integraalin avulla.

(Vihje: tulkitse B sopivaksi pyörähdyskappaleeksi.)

