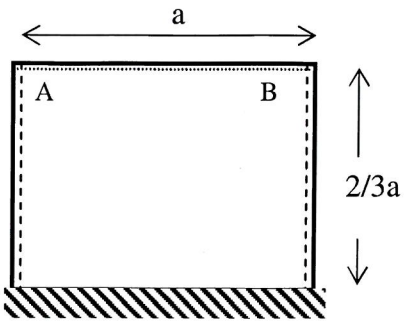
2200

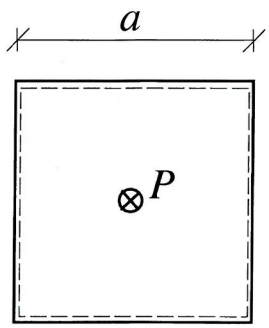
Rak-54[redacted] Rakenteiden mekaniikka II, RM II (4ov)

Tentti 20. 5. 2011

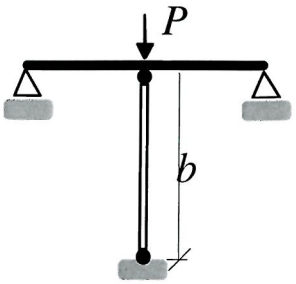
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi (tikkukirjaimin), puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi, tentin päivämäärä sekä tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumero (mukaan lukien tarkistuskirjain)
- monettako kertaa olet ko. opintojaksoa suorittamassa
- minä vuonna olet suorittanut pakolliset harjoitustehtävät



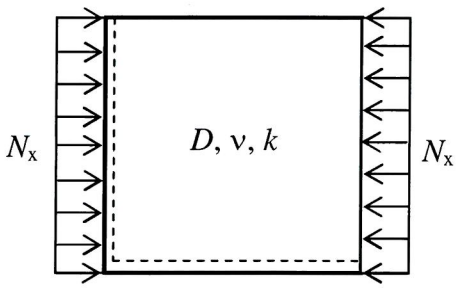
1) Oheinen isotrooppinen (m = vakio) suorakaidelaatta on kahdelta vastaisilta sivuilta vapaasti tuettu (pituus 2/3 a), yhdeltä reunalta jäykästi tuettu ja viimeinen reuna on vapaa (leveys a). Tasainen ***viivakuorma*** q kuormittaa tätä viimeistä reunaa AB. Määritä rajakuorma q_p. Vinkki: *tarkastele ainakin pari mahdollista mekanismia.*

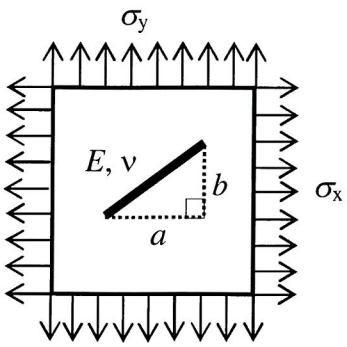


2) Neliölaatta, jonka sivumitta on a, paksuus h ja taivutusjäykkyys $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$, on tuettu reunoiltaan vapaasti. Lisäksi se on tuettu keskipisteestään kimmoisella pilarilla, jonka pinta-ala on A, pituus b ja materiaalin kimmokerroin E. Laattaa kuormittaa pilarin kohdalla (keskipisteessä) pistekuorma P. Arvioi käyttämällä potentiaalienergian minimin periaatetta ja soveltuvaa taipuman yritefunktiota, kuinka suuri osa kuormasta jää pilarin kannettavaksi. Saa olettaa, että ν=0.3 ja b=a. Vinkki: *yritteksi esim. käy Navier'n ratkaisun eka termi, miksi? Muukin luvallinen yrite käy.*



3) Oheinen tasapaksuinen neliö- kimmoinen laatta lepää kimmoisalla alustalla (alustaluku k). Määritä laatan lommahduskuorman $N_{cr}(k)$ likiarvo käyttäen potentiaalienergian minimin periaatetta sekä mahdollisimman yksinkertaista yritettä taipumalle. Laatta on kahdelta reunalta vapaasti tuettu ja muilta reunoilta vapaa. Laatan taivutusjäykkyys on D ja Poissonin luku ν. Tutki kriittisten kuormien suhdetta $N_{cr}(k) / N_{cr}(0)$ alustaluvun k funktiona.
Vinkki: *yrite; muista mitkä ovat ne ehdot jotka yritteen pitäisi toteuttaa etukäteen?*





4) Oheinen kimmoinen tasapaksuinen levy on tasojännitystilassa. Jännityksettömän levyn pinnalla piirretään tussilla ohut ja hyvin hyvin lyhyt jana (pituus dL), jonka kaltevuus on b:a, a ja b ovat nollasta eroavia dL- janan ortogonaalisia projektioita. Tämän jälkeen levyä kuormitetaan biaksiaalivetojännityksillä σ_x ja σ_y.

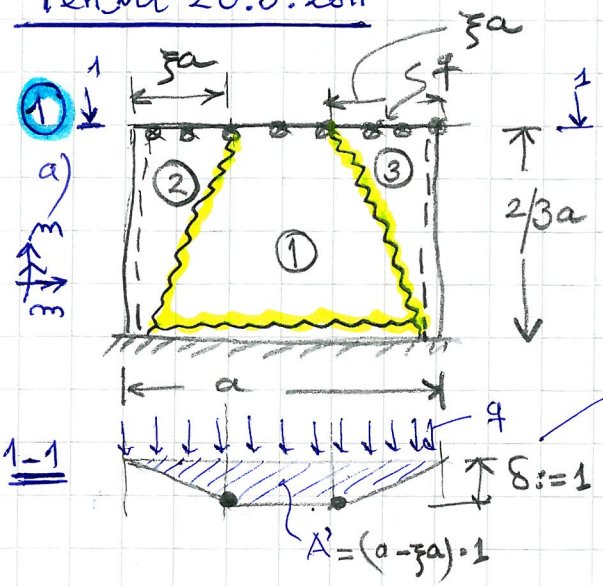
a) Olettaen, että kuormitettu levy pysyy kimmoisalla alueella, laske mikä on janan dL kaltevuuden muutos (olettaen, että piirretty viiva on täydellisesti liimautunut levyn aineeseen).
Kimmoparametrit E, ν (tai G) ovat tunnettuja vakioita ja venymät ovat pieniä.

b) Selosta, ***algoritmisesti***, miten määrittäisit siirtymäkentän komponentit $u(x,y)$ ja $v(x,y)$, yleisesti levyn tapauksessa (tasojännitystila), jos kaikki jännityskomponentit $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ja $\tau_{xy}(x,y)$, tunnetaan kentässä.

selvitä ensin *ekspliittisesti* itsellesi: 1- mikä on se fysikaalinen objekti mihin kysymys liittyy (*define the physical object(s)?*)
2- mitkä tietoja ovat annetut (*data?*)
3- mitä kysytään (*question?*)
4- periaatetasolla, mitkä vaiheet tarvitset, jotta ongelmaan vastaat (ratkaisussuunnitema – *algoritmi*)

Tentti 20.5.2011 — Ratkaisut

① a)



$\xi \in [0, 1/2]$ $(0 \div 1/2)$ $(\forall \delta)$

$$\delta W_{ext} = \int_A q\,\delta w\,dx\,dy = q\cdot(a-\xi a) = qa(1-\xi)$$

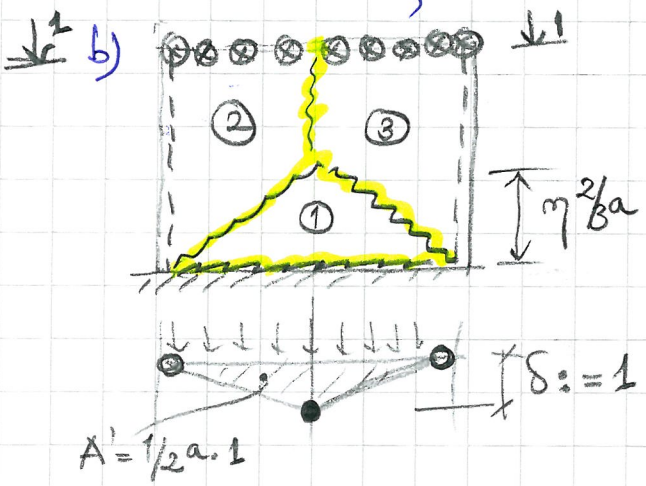
$$= A'\cdot q$$

$$\delta W_{int} = \frac{m}{6}\left(9 + 12\xi + 8/\xi\right)$$

$$\boxed{q_p = \frac{m}{a}\,\frac{1}{6(1-\xi)}\cdot\left(8/\xi + 12\xi + 9\right)}$$

- Haetaan pienin $q_p(\xi)$ $= 9{,}75\,m/a$, $\xi_p = 0{,}3444$

b)

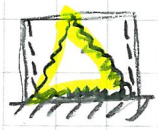


$\eta \in [0, 1]$

$$\delta W_{ext} = \frac{1}{2}qa$$

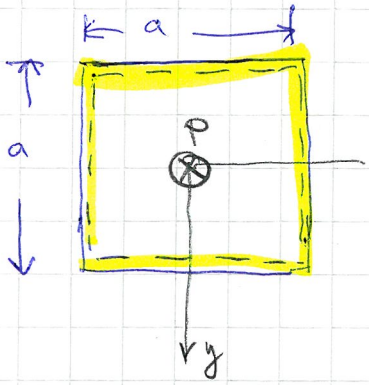
$$\delta W_{int} = m/6\cdot(16 + 18/\eta)$$

$$\boxed{q_p = 11{,}33\,m/a,\ \eta = 1}$$



---

② Tässä valitaan $w(x,y) = w_0\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ tot. KINEMAATTISETRE:
(mikä tahansa muu kelpaa kun vaan ehto on ok.)



[2p] $U = U_{laatta} + U_{pilari}$; $V\,(= +Pw_0)$

[2p]

x [1p] $U_{laatta} = \frac{1}{2}\int_A M\,\delta k\,dA = \frac{D}{2}\int_A (\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left(w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xy}^2\right)dA$

[1p] $U_{pilari} = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon\,dV = w_0^2\,EA/2b$ [1p]

$$\Pi = U + V = w_0^2\left(\frac{D}{2}\frac{\pi^4}{a^2} + \frac{EA}{2b}\right) - Pw_0 \quad [1p]$$

$$\delta\Pi = 0,\ \forall\delta w \Rightarrow \boxed{w_0 = Pa^2b/(Db\pi^4 + EAa^2)}$$

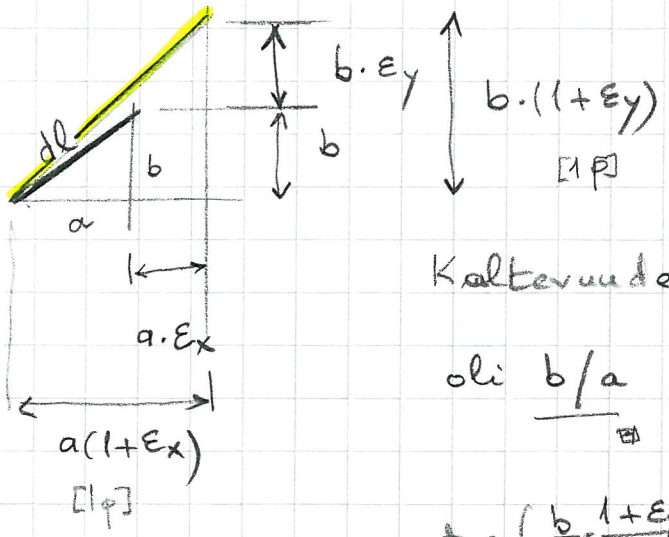
$\Rightarrow$ Pilarille tulee kuormaa : $\boxed{EA\varepsilon_0 = EA\frac{w_0}{b}} = \frac{EAa^2}{D\pi^4 b + a^2 EA}$ [1p]

[1p]

pilarin aksiaalinen venymä

④ :

Liikkunut jana palautetaan sammaan origoon kuin alkutilassa (shifti)



$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{cases}$$

Kaltevuuden muutos:

oli b/a nyt $\dfrac{b(1+\varepsilon_y)}{a(1+\varepsilon_x)}$

$$\Rightarrow \text{muutos } \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_x} - \frac{b}{a}\right)\Big/(b/a) = -\left(1 - \frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_y}\right)$$

[2p]

$$= \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{1+\varepsilon_x} \approx \varepsilon_y - \varepsilon_x \quad \text{kun } |\varepsilon_x| \ll 1,\ |\varepsilon_y| \ll 1$$

$$= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x - \sigma_x + \nu\sigma_y\right) = \frac{1}{E}\left[\sigma_y(1+\nu) - \sigma_x(1+\nu)\right]$$

$$= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_y - \sigma_x) \quad [1p]$$

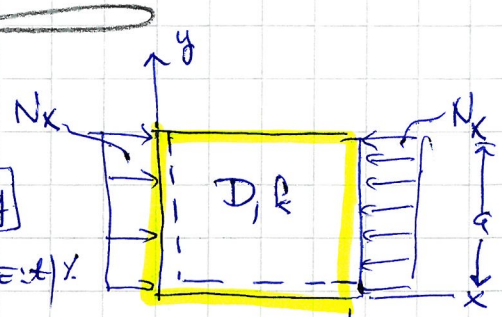
③ $\Delta\Pi = \Delta U + \Delta V$

$$\Delta U = \Delta U_{laatta} + \Delta U_{alusta}$$

yrite:

$$\boxed{w(x,y) = w_0 xy}$$

(tot. kin. reit)!



$$\Delta V + \Delta U_{laatta} + \Delta U_{alusta} = \text{nyt}$$

$$D/2\int_A \left((\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left(w_{,xx}w_{,yy} - (w_{,xy})^2\right)\right)dA + \frac{1}{2}\int_A k w^2\, dA - 1/2\int_A N_x (w_{,x})^2 dA$$

$$\frac{1}{2}k\int_A w^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}k w_0^2\int_0^a x^2 dx\int_0^a y^2 dy = \frac{1}{2}k w_0^2 \cdot 1/3\, a^3\, 1/3\, a^3 = 1/18\, k w_0^2 a^6$$

$$\Rightarrow \delta\Pi = 0,\ \forall\delta w \Rightarrow \Big(\underbrace{\left[D(1-\nu)a^2 - 1/6 N_x a^4 + 1/18\, k a^6\right]}_{=0}\cdot 2w_0 = 0,\ \forall w_0$$

$$D(1-\nu)a^2 - 1/6 N_x \cdot a^4 + 1/18\, k a^6 = 0$$

kriittisyysehto

$$\Rightarrow \boxed{N_x(k) = \frac{6D(1-\nu)}{a^2} + 1/3\, k a^2}$$

($\geq N_x(k)$-todellinen)

likiarvo

2(2)