Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Hiltunen

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 2 15.11.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Lentokone lentää vakiokorkeudella lyhintä reittiä pisteeseen (60° N, 135° E) (pallonpinta-koordinaatit $\theta = 30°$, $\varphi = 135°$). Eräällä hetkellä kone on pisteessä $P = (30°\,\mathrm{S},\ 90°\,\mathrm{W})$. Olkoon ko. hetkellä koneen lentosuuntaan osoittava yksikkövektori $= \vec{t}$. Määritä $\vec{t}$:n koordinaatit kannassa $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, missä $\vec{e}_1$ on itään ja $\vec{e}_2$ pohjoiseen osoittava yksikkövektori pisteessä P.

2. Määritä polynomin $p(z) = z^4 + z^2 + 1 + i$ kaikki juuret (nollakohdat) perusmuodossa $x + iy$, missä x ja y ovat tarkkoja (geometrisia) lukuja. *Kaava-apu*: $\tan\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha/(1+\cos\alpha)$.

3. Määritellään reaalifunktiot

$$f(x) = \sqrt{2-x}, \quad g(x) = (f \circ f)(x), \quad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k [g(x)]^k}{k}.$$

   Määritä funktioiden g ja h (laskusääntöjen puitteissa suurimmat mahdolliset) määrittelyjoukot $\mathcal{D}_g$ ja $\mathcal{D}_h$.

4. Vuoristoisen maaston korkeus merenpinnasta on origon O lähellä funktio

$$f(x,y) = \frac{1}{100}(12x^2 - 7xy - 12y^2) + 2.$$

   Origossa on kahden tien S_1, S_2 risteys. Tiet ovat maastoon sovitettuja ja vaakasuoria, ja lisäksi ne ovat kartallakin suoria. Teiden S_1, S_2 poikki kulkee suora rautatie pisteissä $A \in S_1$, $B \in S_2$. Molemmat pisteet ovat O:sta etäisyydellä 1 (yksikkö = km). Määritä suurin pudotuskorkeus laaksoon rautatiesillalta, jonka päät ovat pisteissä A, B.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Pitkäranta/Hiltunen

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Mellanförhör 2 15.11.2010

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. Ett flygplan flyger på konstant höjd den kortaste rutten till punkten (60° N, 135° E) (sfäriska koordinater $\theta = 30°$, $\varphi = 135°$). I ett visst ögonblick är flygplanet i punkten $P = (30° \text{ S}, 90° \text{ W})$. Låt $\vec{t}$ vara enhetsvektorn, som pekar i flygplanets flygriktning i det aktuella ögonblicket. Bestäm $\vec{t}$:s koordinater i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, där $\vec{e}_1$ är enhetsvektorn, som pekar österut och $\vec{e}_2$ enhetsvektorn, som pekar norrut i punkten P.

2. Bestäm alla rötter (nollställen) till polynomet $p(z) = z^4 + z^2 + 1 + i$ på grundformen $x + iy$, där x och y är exakta (geometriska) tal. *Nyttig formel*: $\tan \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha / (1 + \cos \alpha)$.

3. Definiera de reellvärda funktionerna

$$f(x) = \sqrt{2 - x}, \quad g(x) = (f \circ f)(x), \quad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k [g(x)]^k}{k}.$$

   Bestäm (de största möjliga) definitionsmängderna $\mathcal{D}_g$ och $\mathcal{D}_h$ för funktionerna g och h.

4. Höjden över havsytan hos en bergig terräng ges i en omgivning av origo O av funktionen

$$f(x, y) = \frac{1}{100}(12x^2 - 7xy - 12y^2) + 2.$$

   I origo korsar två vägar S_1 och S_2. Vägarna är anpassade till landskapet och horisontella. Vägar är rätlinjiga också på kartan. En järnväg korsar vägarna S_1 och S_2 i punkterna $A \in S_1$ och $B \in S_2$. Bägge punkterna är på avståndet 1 (enhet = km) från O. Bestäm högsta fallhöjden ner i dalen från järnvägsbron, vars ändpunkter är A och B.