

## Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 1 11.10.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

- a) Perustuen kunta-aksiomiin ja niistä johdettuun laskusääntöön  $0 \cdot x = 0 \forall x$  näytä oikeaksi kunnan laskusääntö  $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ .  
b) Rationaalilukujen kunnan järjestetyssä laajennuksessa määritellään luvun  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x > 0$   $m$ :s juuri  $\sqrt[m]{x}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ) lukuna  $a$ , jolle pätee  $a^m = x$  ja  $a > 0$ . Perustuen tähän määritelmään ja kunta-aksiomiin näytä oikeaksi laskusääntö  $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{x \cdot y}$ .
2. On annettu lukujono  $\{b_n\}$  ja määritellään palautuva lukujono  $\{a_n\}$  seuraavasti:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{na_n b_n + 2n + 1}{2n + 2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

- a) Olkoon  $b_n = 0 \forall n$ . Näytä suoraan lukujonon raja-arvon määritelmästä, että  $\lim_n a_n = 1$ .  
b) Olkoon  $\lim_n b_n = 1$ . Määritä raja-arvo  $\lim_n a_n$  perustuen tietoon, että raja-arvo on olemassa. Voit käyttää tunnettuja raja-arvojen yhdistelysääntöjä.  
c) Näytä epäsuoralla todistustavalla, että jos  $\lim_n b_n = 2$ , niin  $\lim_n a_n$  ei ole olemassa.
3. a) Jos  $\vec{a}, \vec{b}$  ovat lineaarisesti riippumattomat tason vektorit, niin millä  $t$ :n arvoilla ( $t \in \mathbb{R}$ ) myös vektorit  $\vec{a} - t\vec{b}$  ja  $t\vec{a} - 2\vec{b}$  ovat lineaarisesti riippumattomat?  
b) Koordinaatistossa  $(O, \vec{a}, \vec{b})$  on  $P = (1, -2)$ . Miten  $P$  ilmoitetaan koordinaatistossa  $(O', \vec{c}, \vec{d})$ , kun  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$  ja  $O = (1, 1)$  tässä koordinaatistossa?
4. Taso  $T$  kulkee pisteiden  $(2, 1, -1)$  ja  $(1, 2, -2)$  kautta ja leikkaa tason  $T_1 : x + 2y + 3z + 4 = 0$  siten, että tasojen välinen diedrikulma (= kulma, jonka tasot muodostavat leikkaussuoran suunnasta nähtynä) on suora kulma. Määritä  $T$ :n yhtälö muodossa  $ax + by + cz + d = 0$ .