S-96.1121 Dynaaminen kenttäteoria — Tentti

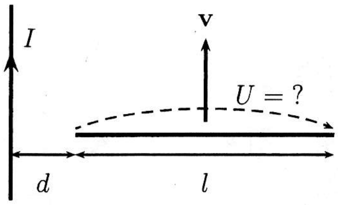
1.9.2011 — Henrik Kettunen & Ari Sihvola

* TASKULASKIN SALLITTU, EI APUKIRJALLISUUTTA *

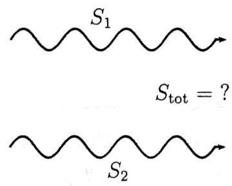
– Kaikki neljä tehtävää ovat painoarvoiltaan yhtä suuria –

---

1. Äärettömän pitkässä ohuessa suorassa virtalangassa kulkee virta $I = 10\,\mathrm{A}$ kuvan osoittamassa suunnassa. Ohut metallitanko $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$, joka on kohtisuorassa virtalankaa vastaan etäisyydellä $d = 0{,}1\,\mathrm{m}$, liikkuu nopeudella $v = 5\,\mathrm{m/s}$ langassa kulkevan virran suuntaisesti. Laske liikkuvan johtimen päiden välille indusoituva jännite.



2. Ilmassa etenee kaksi täsmälleen samantaajuista ja samansuuntaista aikaharmonista tasoaaltoa, joiden kuljettamat tehotiheydet ovat $S_1 = 100\,\mathrm{W/m^2}$ ja $S_2 = 25\,\mathrm{W/m^2}$. Aallot ovat kuitenkin peräisin eri lähettimistä, eikä niitä ole vaiheistettu keskenään. Vastaanottimessa nämä samantaajuiset aallot kuitenkin yhdistyvät, ja riippuen niiden vaihe-erosta ne voivat joko vahvistaa tai kumota toisiaan. Millä välillä vastaanotettu kokonaistehotiheys S_{tot} voi tässä tapauksessa vaihdella?



3. (a) Suorakulmaisessa aaltoputkessa (leveys a, korkeus b) voi edetä sekä TE_{mn}- että TM_{mn}-aaltomuotoja. Otetaan tarkasteluun TM_{11}-muoto. Kyseisellä muodollahan on pitkittäinen, eli etenemisuuntainen sähkökenttä

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_z \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}.$$

Laske tämän pitkittäisen sähkökentän avulla TM_{11}-muodon poikittainen magneettikenttä.

(b) Suorakulmaisen aaltoputken TE_{mn}- ja TM_{mn}-muotojen katkotaajuudet voidaan laskea aaltoputken mittojen ja indeksien m ja n avulla. Tavallisimmin käytetty ns. perusmuoto on TE_{10}. Huomataan, että myös TM_{10}-muodolle voidaan laskea tämän kanssa täsmälleen sama katkotaajuus. Minkä vuoksi TM_{10}-muotoa ei kuitenkaan koskaan käytetä signaalin siirtoon suorakulmaisessa aaltoputkessa?

4. (a) Ideaalisen häviöttömän Hertzin dipolin vahvistus on 1,76 dB. Suuren lautasantennin vahvistus voi sen sijaan olla yli 30 dB. Mitä tämä tarkoittaa, eli miten määritellään antennin vahvistus?

(b) Radiolinkki toimii $f = 3\,\mathrm{GHz}$:n taajuudella. Yhteysvälin pituus on $r = 10\,\mathrm{km}$. Sekä lähetyksessä että vastaanotossa käytetään samanlaisia antenneja, joiden vahvistus on $G = 20\,\mathrm{d}B$. Antennin sieppauspinta voidaan lausua antennin vahvistuksen avulla muodossa $A_e = \lambda^2 G/(4\pi)$. Paljonko on yhteysvälin vaimennus desibeleinä?

Nablaoperaatiot

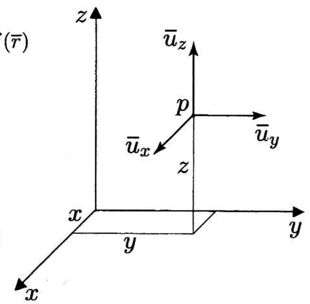
Karteesinen koordinaatisto

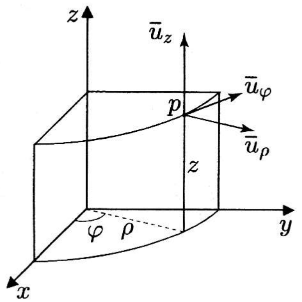
$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$





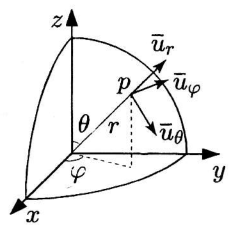
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho\overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r\sin\theta\overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r\sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$\rho = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta,$

$r = \sqrt{\rho^2+z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\, dx + \overline{u}_y\, dy + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\, dy\, dz$

$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\, dx\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\, dx\, dy$

$dV = dx\, dy\, dz$

Sylinterikoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\, d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\, d\varphi + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\, d\varphi\, dz$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\, d\rho\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\, d\rho\, d\varphi$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

Pallokoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\, dr + \overline{u}_\theta r\, d\theta + \overline{u}_\varphi r\sin\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r\sin\theta\, dr\, d\varphi$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\, dr\, d\theta$

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Gaussin lause $\int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\, \mathrm{C}$

$\frac{\frac{Vs}{Am} \cdot \cancel{A}}{m}$

$\frac{Vs}{m^2}$