

Yo-kirjoituksissa sallitut laskimet sallittu.

Tehtävät

1. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$

2. a) Määritellään relaatio R joukossa \mathbb{N} seuraavasti: \times

$$xRy \iff x \text{ on jaollinen } y:\text{llä.}$$

Onko relaatio refleksiivinen? Symmetrinen? Transitiivinen?

- b) Osoita, että jos funktiot f ja g ovat bijektioita, ja yhdistetty kuvaus gf on määritelty, niin gf :n käänteisfunktio on yhdistetty kuvaus $f^{-1}g^{-1}$.

3. a) Ratkaise

$$4x \equiv 2 \pmod{27}.$$

- b) Olkoon p alkuluku ja $a, b \in \mathbb{Z}$. Osoita, että

$$(a+b)^p \equiv a+b \pmod{p}.$$

4. Olkoon G_2 graafi, jossa on tasan kaksi solmua, v_1 ja v_2 , ja $\{v_1, v_2\}$ on G_2 :n sivu. Muodostetaan graafi G_n kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 3$ siten, että lisätään graafiin G_{n-1} solmu v_n ja sivut $\{v_n, v_{n-1}\}$ ja $\{v_n, v_{n-2}\}$.

- a) Selvitä, millä kokonaisluvun $n \geq 3$ arvoilla graafissa G_n on Eulerin kierros.

- b) Osoita induktiolla, että graafin G_n kromaattinen luku $\chi(G_n)$ on kolme, kun $n \geq 3$.