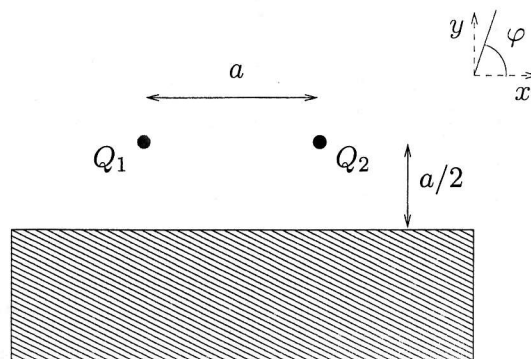


TASKULASKIN SALLITTU, EI APUKIRJALLISUUTTA.

(Vihje— *Maxwellin yhtälöt statiikassa:*)

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

1. Kaksi pistevarausta Q_1 ja Q_2 sijaitsevat korkeudella $a/2$ johdetason yläpuolella. Niiden välimatka on a . Varaukset ovat samanmerkkisiä mutta erisuuria: $Q_2 = 2Q_1$. Varauksiin kohdistuu tilanteessa voimia. Ovatko ne yhtäsuuret? Jos eivät, kumpaan kohdistuu amplitudiltaan suurempi voima? Kuinka paljon suurempi? Mihin suuntaan on varaukseen Q_1 , mihin suuntaan varaukseen Q_2 kohdistuva voima? Ilmoita suunnat xy -tason kulman φ avulla.



2. Origossa, tyhjässä avaruudessa, sijaitsee z -suuntainen sähköstaattinen dipoli, jonka dipolimomenttivektori on $\mathbf{p} = \mathbf{u}_z 10^{-10}$ Asm. Laske sen aiheuttama sähkökenttä pisteessä $\mathbf{r} = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)1$ m, siis kun kaikki kolme koordinaattia ovat yhden metrin. Mihin suuntaan kenttä osoittaa siinä pisteessä? — Vihje: Dipolin potentiaali on

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

3. Pieni palloelektrodi on upotettu maahan syvyydelle $d = 3$ m ja siihen johdetaan ohuella eristetyllä johtimella virta $I = 4$ A. Määrää maan pinnalla kahden toisistaan metrin etäisyydellä olevan pisteen välinen jännite, kun toinen piste on juuri elektrodin yläpuolella. Johtavuus $\sigma = 2$ S/m.

— Vihje: Palloa voi pitää ulkopuolisen kentän kannalta pistelähteenä pallon koosta riippumatta vain homogeenisessa materiaalissa. Pistelähteen approksimaatio on likimain voimassa johtavassa puoliavaruudessa kun pallo on tarpeeksi pieni, mikä tässä oletetaan. Käytä kuvälähdeperiaatetta.

4. Jos määrittelet (kuten kurssilla on tehty) magnetostatiikan vektoripotentialin \mathbf{A} siten, että se on divergenssitön ja sen roottori on magneettivuon tiheys, johda sille yhtälö lähdevirrantiheysfunktion \mathbf{J} avulla ilmaistuna. Oleta homogeeninen avaruus, jossa ei ole ainetta (eli materiaali-parametrit ovat ϵ_0 ja μ_0).

Nablaoperaatiot

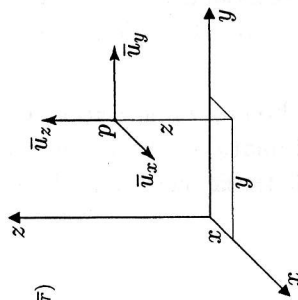
Karteesinen koordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \bar{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\vec{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



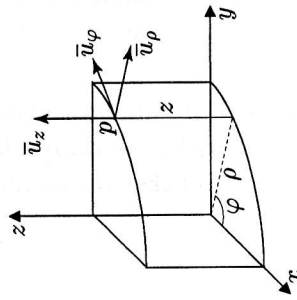
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{u}_\rho & \rho \bar{u}_\varphi & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



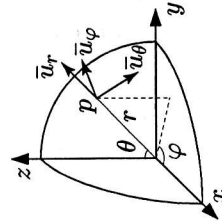
Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \bar{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r \bar{u}_\theta & r \sin \theta \bar{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



Koordinaattimuunnokset vektorille \vec{f}

Karteesinen \leftrightarrow sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_x dx + \bar{u}_y dy + \bar{u}_z dz$$

$$dS_x = \bar{u}_x dy dz$$

$$dS_y = \bar{u}_y dx dz$$

$$dS_z = \bar{u}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

Sylinterikoordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_\rho d\rho + \bar{u}_\varphi \rho d\varphi + \bar{u}_z dz$$

$$dS_\rho = \bar{u}_\rho \rho d\varphi dz$$

$$dS_\varphi = \bar{u}_\varphi d\rho dz$$

$$dS_z = \bar{u}_z \rho d\rho d\varphi$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Pallokoordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_r dr + \bar{u}_\theta r d\theta + \bar{u}_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$dS_r = \bar{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dS_\theta = \bar{u}_\theta r \sin \theta dr d\varphi$$

$$dS_\varphi = \bar{u}_\varphi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\text{Gaussin lause} \quad \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Stokesin lause} \quad \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Vakioita

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{C}$$