Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

1. välikoe 08.03.2011 / Kibble

Kirjoita selvästi *jokaiseen koepaperiin* seuraavat tiedot:

- Mat-1.2620 SovTnB 1. vk 08.03.2011
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Sallitut apuvälineet: ***Laskin*** **ja Mellinin** ***kaava*****- ja** ***taulukkokokoelmat*****.**

Vastausohje: **Vastaa** ***lyhyesti*** **ja** ***ytimekkäästi*****, mutta** ***perustele ratkaisusi*****. Pelkkä lukuarvo vastauksena** ***ei anna*** **pisteitä.**

1. Uurnassa on 5 punaista ja 7 sinistä palloa.

(a) Poimit uurnasta satunnaisesti kolme palloa *takaisinpanolla*. Mikä on todennäköisyys, että saat kolme punaista palloa?

(b) Poimit uurnasta satunnaisesti kolme palloa *ilman takaisinpanoa*. Mikä on todennäköisyys, että saat kolme punaista palloa?

(c) Poimit uurnasta satunnaisesti kolme palloa *ilman takaisinpanoa*. Mikä on todennäköisyys, että viimeisenä poimittava pallo on punainen, jos kaksi edellistä ovat olleet sinisiä?

__**Ratkaisu kysymykseen 1:**__

Poimitaan kolme palloa uurnasta, jossa on 5 punaista ja 7 sinistä palloa.

Olkoon

$$A_i = \{i.\text{ pallo on punainen}\}$$

$$A_i^c = \{i.\text{ pallo on sininen}\}$$

(a) Kysytty todennäköisyys on

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Koska poiminta tapahtuu *takaisinpanolla*, tapahtumat A_1, A_2 ja A_3 *ovat riippumattomia*. Siten *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* perusteella

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3) = (5/12)^3 = 0.0723$$

mikä nähdään todeksi huomaamalla, että koska poiminnan jokaisessa vaiheessa uurnassa on 12 palloa, joista 5 on punaista.

(b) Kysytty todennäköisyys on

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Koska poiminta tapahtuu ilman takaisinpanoa, tapahtumat A_1, A_2 ja A_3 *eivät ole riippumattomia*. Siten *yleisen tulosäännön* perusteella

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2) = (5/12)\times(4/11)\times(3/10) = 0.0455$$

(c) Kysytty todennäköisyys on

$$\Pr(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c)$$

Jos uurnassa on aluksi 7 sinistä ja 5 punaista palloa ja 2 sinistä palloa otetaan pois, jäljelle jää 5 palloa kumpaakin väriä. Siten todennäköisyys saada seuraavaksi punainen pallo on

$$\Pr(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c) = 5/10 = 0.5$$

2. Valheenpaljastuskoneen luotettavuudesta on käytettävissä seuraavat tiedot: Henkilö, joka *valehtelee* tulee oikein luokitelluksi valehtelijaksi todennäköisyydellä 0.9. Toisaalta henkilö, joka *ei valehtele* tulee virheellisesti luokitelluksi valehtelijaksi todennäköisyydellä 0.05.

Oletetaan, että valheenpaljastuskonetta käytetään ihmisjoukkoon, jossa 1 % valehtelee.

(a) Mikä on todennäköisyys että tästä ihmisjoukosta satunnaisesti poimittu henkilö luokitellaan valehtelijaksi?

(b) Mikä on todennäköisyys, että valehtelijaksi luokiteltu henkilö onkin rehellinen?

<u>Ratkaisu kysymykseen 2:</u>

Määritellään seuraavat tapahtumat:

D = "Valheenpaljastuskone luokittelee henkilön valehtelijaksi"

V = "Henkilö valehtelee"

R = "Henkilö ei valehtele"

Tehtävän asettelun mukaan seuraavat *todennäköisyydet* tunnetaan:

$$\Pr(D|V) = 0.9$$

$$\Pr(D|R) = 0.05$$

$$\Pr(V) = 0.01$$

Komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan mukaan

$$\Pr(R) = 1 - \Pr(V) = 0.99$$

(a) Tehtävässä kysytään todennäköisyyttä Pr(D). Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan:

$$\begin{aligned}\Pr(D) &= \Pr(R)\Pr(D|R) + \Pr(V)\Pr(D|V) \\ &= 0.99 \times 0.05 + 0.01 \times 0.9 \approx 0.0585\end{aligned}$$

(b) Tehtävässä kysytään todennäköisyyttä

$\Pr(R|D)$

Bayesin kaavan mukaan:

$$\Pr(R|D) = \frac{\Pr(R)\Pr(D|R)}{\Pr(R)\Pr(D|R) + \Pr(V)\Pr(D|V)}$$

$$= \frac{0.99 \times 0.05}{0.99 \times 0.05 + 0.01 \times 0.9} \approx 0.846$$

Huomaa, että todennäköisyys sille, että valheenpaljastuskoneen valehtelijaksi luokittelema henkilö on todellisuudessa rehellinen, on erittäin korkea!

3. Heität virheetöntä rahaa 100 000 kertaa.

(a) Mikä on odotettavissa oleva kruunien lukumäärä?

(b) Mikä on todennäköisyys, että kruunien lukumäärä on suljetulla välillä [49 900,50 200]?

Ohje: Käytä (b)-kohdassa keskeiseen raja-arvolauseeseen perustuvaa normaalijakauma-approksimaatiota.

Ratkaisu kysymykseen 3:

(a) Olkoon X kruunien lukumäärä, kun virheetöntä rahaa heitetään 100 000 kertaa. X on satunnaismuuttuja, joka noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(n, p)$, jossa

$n = 100\,000$

$p = 1/2$

Siten odotettavissa oleva kruunien lukumäärä on

$\mathrm{E}(X) = np = 50\,000$

(b) Keskeisen raja-arvolauseen mukaan satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\mathrm{D}(X)} \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

jossa

$\mathrm{E}(X) = np = 50\,000$

$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 25\,000$

$\mathrm{D}(X) = 158.1$

Standardoimalla satunnaismuuttuja X ja käyttämällä standardoidun normaalijakauman N(0,1) taulukoita saadaan kysytyn todennäköisyyden approksimaatioksi:

$\Pr(49900 \le X \le 50200)$

$= \Pr((49900 - 50000)/158.1 \le (X - 50000)/158.1 \le (50200 - 50000)/158.1)$

$= \Pr(-0.63 \le Z \le 1.26)$

$= \Pr(Z \le 1.26) - \Pr(Z \le -0.63)$

= 0.8962 – 0.2643

= 0.6319

4. Alla oleva taulukko esittää diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktiota $f_{XY}(x, \mathrm{y}) = \Pr(X = x \text{ ja } Y = \mathrm{y})$.

(a) Laske X:n ja Y:n korrelaatio.

(b) Ovatko X ja Y riippumattomia?

$f_{XY}(x,y)$		x		
		–1	0	+1
y	+1	0	3/8	0
	0	3/8	0	1/8
	–1	0	1/8	0

<u>Ratkaisu kysymykseen 4:</u>

Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x x \Pr(X = x) = (-1\times\frac{3}{8}) + 0 + (1\times\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4} = -0.25$$

Satunnaismuuttujan X 2. *origomomentti* on

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_x x^2 \Pr(X = x) = (-1)^2\times\frac{3}{8} + 0 + 1^2\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Satunnaismuuttujan X *varianssi* on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}\right]^2 = \frac{7}{16} = 0.4375$$

Satunnaismuuttujan X *standardipoikkeama* on

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\frac{7}{16}} = 0.6614$$

Satunnaismuuttujan Y *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_y y \Pr(Y = y) = 1\times\frac{3}{8} + 0 + (-1)\times\frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Satunnaismuuttujan Y 2. *origomomentti* on

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sum_y y^2 \Pr(Y = y) = (1)^2\times\frac{1}{8} + 0 + (-1)^2\times\frac{3}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Satunnaismuuttujan Y *varianssi* on

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \mathrm{E}[Y - \mathrm{E}(Y)]^2 = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2 = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4}\right]^2 = \frac{7}{16} = 0.4375$$

Satunnaismuuttujan Y *standardipoikkeama* on

$$\mathrm{D}(Y) = \sqrt{\frac{7}{16}} = 0.6614$$

Määrätään ensin

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_x \sum_y xy \Pr(X = x, Y = y) \\ &= 0\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *kovarianssi* on

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] \\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0.0625\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *korrelaatio* on

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)} = \frac{\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{7}{16}} \times \sqrt{\frac{7}{16}}} = \frac{1}{7} = 0.1429$$

(b) Eivät ole riippumattomia, esim

$$\Pr(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \Pr(X = 1)\Pr(Y = 0)$$