Matematiikka
Aalto-yliopisto

Varpanen

Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I (5op)

Tentti 25.10.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää kaikkia ylioppilaskokeessa sallittuja laskimia, ei muita apuvälineitä. Koeaika on neljä tuntia.

1. Esitä luku $(1+i)^5$ muodossa $x+iy$. (6p)

2. Perustele lyhyesti, ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia. (Kussakin kohdassa oikea vastaus 1p, perustelu 1p.)

   a) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$ kaikille $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   b) Funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ on kaikkialla derivoituva.
   c) $\int_C \overline{z}\,dz = i\pi$, kun C on yksikköympyrän kaari kierrettynä vastapäivään pisteestä $(1,0)$ pisteeseen $(-1,0)$.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$.

   a) Millaiseksi f kuvaa sektorin (piirrä kuva)
   $$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| \le 2 \text{ ja } \frac{\pi}{2} \le \operatorname{Arg} z \le \frac{3\pi}{4} \right\}? \qquad \text{(2p)}$$
   b) Merkitään $f = u + iv$. Määritä funktiot $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (2p)
   c) Osoita, että f on derivoituva kaikkialla $\mathbb{C}$:ssä ja että $f'(z) = 3z^2$. (2p)

4. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$. Laske (1-jaksolliseksi jatketun) funktion f Fourier-sarja. (6p)

5. a) Laske pulssin
   $$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$
   Fourier-muunnos. (2p)
   b) Kerro kaksi syytä, miksi deltadistribuutiolla on keskeinen rooli Fourier-muunnoksessa. (2p)
   c) Olkoon $f = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Laske vektorin f diskreetti Fourier-muunnos. (2p)

Kaavoja löytyy paperin kääntöpuolelta.

Cauchyn integraalikaava:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz,$$

missä suljettu käyrä C kierretään kerran vastapäivään ja piste z_0 on käyrän C sisäpuolella.

Fourier-sarja $2L$-jaksolliselle funktiolle:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

missä

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) \, dx$$

ja

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} f(x) \, dx.$$

Edellisen kompleksimuoto:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \, dx,$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-i \frac{n\pi x}{L}} f(x) \, dx.$$

Fourier-muunnos:

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu x} f(x) \, dx,$$

käänteismuunnos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} \widehat{f}(\nu) \, d\nu.$$

Diskreetti Fourier-muunnos ($M \in \mathbb{N}$ näytteiden lukumäärä): $\widehat{f} = F_M f$, missä F_M on $M \times M$-matriisi $(F_M)_{jk} = \omega_M^{(j-1)(k-1)}$ $(j, k \in \{1, \ldots, M\})$ ja $\omega_M = e^{-i2\pi/M}$.