Aalto-yliopisto
Matematiikan laitos

Talponen, Heikkinen, Harjula

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

Välikoe 2, 14.11.2011 klo 16-19

YLIOPPILASTUTKINNOSSA HYVÄKSYTYT LASKIMET ON TÄSSÄKIN SALLITTU.

VASTAA SEURAAVIIN TEHTÄVIIN. KAIKISTA TEHTÄVISTÄ SAA 6 PISTETTÄ.

MUISTA PERUSTELLA SELKEÄSTI RATKAISUSI.

T1. Olkoon $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R},\ f(x) = (\sin(x))^x$. Laske f'.
(Vihje: Kannattaa kirjoittaa $\sin(x) = \exp(\ln(\sin(x)))$.)

T2. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y'(0) = 1,\ y(0) = 0.$ (3p)

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(0) = 1.$ (3p)

T3. Näytä, että $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(a) Tutkien funktion $\sin(x)$ derivaatan määritelmää. (3p)

(b) Käyttäen funktion $\sin(x)$ Taylorin kehitelmää. (3p)

T4. Näytä määritelmästä lähtien, että funktio $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^3$ on jatkuva origossa.

VK 2 MALLI + ALUSTAVA PISTEYTYS

T1

$$f: \left]0, \pi\right[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin^x(x)$$

$$\sin(x) = e^{\ln(\sin(x))}$$

$$\sin^x(x) = e^{\ln[\sin^x(x)]} = e^{x\ln[\sin(x)]} \quad (1P)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{x\ln[\sin(x)]} \overset{1^\circ)}{=} e^{x\ln[\sin(x)]} \frac{d}{dx}\left(x\ln(\sin(x))\right) \quad 2^\circ)$$

$$\overset{2^\circ)}{=} e^{x\ln[\sin(x)]}\left(\ln[\sin(x)] + x\frac{d}{dx}\ln[\sin(x)]\right) \quad (1P)$$

$$\overset{1^\circ)}{=} e^{x\ln[\sin(x)]}\left(\ln[\sin(x)] + x\frac{1}{\sin(x)}\frac{d}{dx}\sin(x)\right) \quad (1P)$$

$$= \sin^x(x)\left(\ln[\sin(x)] + x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) \quad (1P)$$

$$= \sin^x(x)\left(\ln[\sin(x)] + x\cot(x)\right)$$

$1^\circ)$ $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dx}$

$2^\circ)$ $\dfrac{d}{dx}\left(a(x)\cdot b(x)\right) = a'(x)b(x) + b'(x)a(x)$

T2

a.) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

Karakteristinen polynomi (yrite $y(x) = e^{rx}$):

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Rightarrow r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow r = 1 \lor r = 2$

Homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu saadaan löytyneiden ratkaisujen lineaarikombinaationa:

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$\Rightarrow y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$

Alkuarvot:

$\begin{cases} y'(0) = C_1 + 2C_2 = 1 \\ y(0) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 2C_2 = 1 \\ C_2 = -C_1 \end{cases} \Rightarrow C_1 - 2C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -1$

$\Rightarrow C_2 = 1$

Ratkaisu: $\underline{y(x) = -e^x + e^{2x}}$

b.) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

Vastaavasti: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

Koska karakteristisen polynomin juuri on kaksinkertainen, ratkaisu on muotoa:

$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$

$y'(x) = C_2 e^{2x} + (C_1 + C_2 x) \cdot 2e^{2x}$

Alkuarvot:

$\begin{cases} y'(0) = C_2 + 2C_1 = 0 \\ y(0) = C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = -2$

Ratkaisu:

$\underline{y(x) = (1 - 2x) e^{2x}}$

Arvostelu

Sekä a)- että b)-kohdassa:

- Karakteristisen polynomin juuret 1p
- Yleisen ratkaisun muoto 1p
- Oikeat vakiot alkuarvoista 1p

T3

a) $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\frac{d}{dx} \sin(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$ 1P

$\left.\frac{d \sin(x)}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$ 1P

$\left.\frac{d \sin(x)}{dx}\right|_{x=0} = \cos(0) = 1$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(0) = 1$ ELi

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ 1P

T3

b) TAPA 1:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(c)(x-c)^i}{i!}$$ VALITAAN $c=0$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)(x)^i}{i!}$$ 1P

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)x^i}{i!}$$

1P

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{\sin(0)\cdot x^0}{0!} + \frac{\cos(0)\cdot x^1}{1!} - \frac{\sin(0)x^2}{2!} + \frac{\cos(0)x^3}{3!} + \dots\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right] = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$= 1$ 1P

TAPA 2:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)(x-c)^i}{i!} + O((x-c)^{n+1})$$

VALITAAN $c=0$ 1P

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)x^i}{i!} + O(x^{n+1})\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} O(x^n) + \frac{1}{x}\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)x^i}{i!}$$ 1P

$$= \lim_{x\to 0} O(x^n) + 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$ n:ÄÄN ASTI JOS n PARITON MUUTEN n-1:EEN

$= 1$ 1P

T4

Jatkuvuuden (ε, δ)-määritelmä:

Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä a, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Nyt: $a = 0$ ja $f(x) = x^3$

Saadaan:

$$|x| < \delta \Rightarrow |x^3| < \varepsilon$$

Valitaan: $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ ja nähdään:

$$|x| < \delta = \sqrt[3]{\varepsilon} \Rightarrow |x|^3 < \varepsilon \quad \| \; |x|^n = |x^n|$$

$$\Rightarrow |x^3| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon. \; \square$$

Nähdään siis, että kun valitaan $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$, väite toteutuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = x^3$ on jatkuva origossa. $\square$

Arvostelu:

- Jatkuvuuden $(\varepsilon - \delta)$-määritelmä 2p
- Sopivan $\delta(\varepsilon)$:n löytäminen 2p
- Oikeat johtopäätökset 2p

Tai:

- Esitetty, että $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ 2p