Aalto-yliopisto Rasila/Murtola

Mat-1.1230 peruskurssi S3 Syksy 2011

1. välikoe Ti 11.10.2011 klo 16.00-19.00

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. (a) Esitä polaarimuodossa kompleksiluku

$$\frac{1+i}{1-i}.$$

(b) Onko funktio $f(z) = (\overline{z})^2$ analyyttinen? Perustele vastauksesi.

(c) Olkoon $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$, $z = x+iy$ ja f kuten b-kohdassa. Osoita, että u harmoninen. Mikä on u:n harmoninen konjugaattifunktio?

2. (a) Etsi Möbius-kuvaus, joka vie pisteet 0, $-i$ ja i pisteiksi -1, 0, ja ∞.

(b) Mikä on potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^2}$$

kehityskeskus? Määritä sarjan suppenemissäde.

3. Laske kompleksinen polkuintegraali

$$\oint_C f(z)\,dz,$$

missä C on kolmio kärkipisteinä $0, 1, 1+\mathrm{i}$, vastapäivään kierrettynä, kun

a)

$$f(z) = \frac{1}{z-i},$$

b)

$$f(z) = \mathrm{Im}\, z.$$

4. Laske residymenetelmää käyttäen trigonometrinen integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta.$$

Vihje: Viereisellä sivulla olevat kaavat voivat virkistää muistia.

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Cauchy-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y).$$

Möbius-kuvaukset:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Polkuintegraali:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.$$

Cauchyn integraalilause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Cauchyn integraalikaava:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Laurentin sarja:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Residylause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Matematiikan peruskurssi S3
Syksy 2011
Välikoe 1
Malliratkaisut

Tehtävien 1-3 arvostelusta:
-Arvosteluperusteet jokaiselle kohdalle on esitetty kyseisen kohdan malliratkaisun jälkeen.
-Muitakin laskutapoja on olemassa, ja niitä käytettiin yksittäisissä vastauspapereissa. Kaikkia ratkaisuja ja niiden pisteytystä ei ole järkevää käsitellä tässä, vaan tätä varten on valitustilaisuus.
-Mikäli useampi arvostelukriteeri jäi hiukan vajaaksi, mutta vastauksesta välittyi muutoin opetetun asian ymmärtäminen tai vastauksessa oli muita ansioita, pyöristettiin pisteitä ylöspäin.

1. a) Esitä polaarimuodossa kompleksiluku

$$\frac{1+i}{1-i}$$

Laventamalla nimittäjän kompleksikonjugaatilla saadaan

$$\frac{(1+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+2\mathrm{i}-1}{2}=i$$

mikä voidaan esittää polaarimuodossa

$$e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Arvostelu:
-oikea vastaus: 2p
-vähäinen yksittäinen merkkivirhevirhe: 2p
-puutteellinen vastaus (esim. vain i) tai useampi merkkivirhe: 0-1p

b) Onko funktio

$$f(z)=(\bar{z})^2$$

analyyttinen? Perustele vastauksesi.

Tapa 1: Polynomin (jollainen z siis on) neliöön korotus on analyyttinen funktio, mutta kompleksikonjugointi ei. Tästä voidaan päätellä että näistä yhdistetty funktio f ei ole analyyttinen.

Tapa 2: Käytetään Cauchy-Riemannin yhtälöitä. Kirjoitetaan z = x + iy ja sijoitetaan f:ään:

$$f(z)=(x-iy)^2=x^2-y^2-i2xy=u(x,y)+iv(x,y)$$

Cauhy-Riemannin yhtälöihin sijoittamalla saadaan

$$\frac{d}{dx}u(x,y)=2\text{x}$$
$$\frac{d}{dy}v(x,y)=-2\text{x}$$

mistä havaitaan että yhtäsuuruus $u_x = v_y$ ei tässä tapauksessa päde. Funktio ei siis ole analyyttinen.

Arvostelu:
-oikea tulos hyvällä perustelulla tai oikein käytetyillä Cauchy-Riemannin yhtälöillä: 2p
-yksittäinen vähäinen selkeä merkkivirhe: 2p
-useampi merkkivirhe: max 1p
-todettu että $f(z) = x^2 - y^2 - i2xy$ on polynomina derivoituva: max 1p
(lauseke on derivoituva sekä x:n että y:n suhteen, mutta ei z:n (z=x+iy) suhteen)
-todettu ilman perusteluja että f(z) on derivoituva: 0p

c) Olkoon u(x,y) = Re(f(z)), z = x + iy, f kuten b-kohdassa. Osoita että u on harmoninen. Mikä on u:n harmoninen konjugaattifunktio?

Jotta u olisi harmoninen, tulee olla

$$\frac{d^2}{dx^2}u+\frac{d^2}{dy^2}y=0$$

Sijoitetaan u:n lauseke b-kohdasta

$$(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2})(x^2-y^2)=2-2=0$$

Siispä u on harmoninen. Etsitään u:n harmoninen konjugaattifunktio v.

Tapa 1: Käytetään Cauchy-Riemannin yhtälöitä (jotka harmonisen konjugaattifunktion tulee siis toteuttaa):

$$\frac{d}{dx}u=2\text{x}$$

Toisaalta myös

$$\frac{d}{dy}v=\frac{d}{dx}u=2\text{x}$$ (Ensimmäinen yhtäsuuruus CR-yhtälöistä, toinen derivoimalla u:ta)

Integroimalla vasenta ja oikeaa termiä y:n suhteen saadaan

$$v(x,y)=2\text{xy}+h(x)$$

missä h(x) on jokin funktio x:stä. Vastaavasti toisen CR-yhtälön perusteella saadaan

$$\frac{-d}{dx}v=\frac{d}{dy}u=-2\mathrm{y}$$
$$\rightarrow$$
$$v(x,y)=2\mathrm{xy}+g(y)$$

Nyt ylemmässä v:n lausekkeessa ei ole pelkästään y:stä riippuvia termejä; ja vastaavasti alemmassa lausekkeessa ei ole puhtaasti x-riippuvaisia termejä. Täten siis h(x) = g(y) = vakio (0 käy myös).

Siten

$$v(x,y)=2\mathrm{xy}+vakio$$

Tapa 2: Voidaan myös havaita, että funktion

$$g(z)=z^2$$

reaaliosa (kun merkitään z = x + iy)

$$u(x,y)=x^2-y^2$$

on sama kuin b-kohdan funktion tuottama u. Koska g on kompleksiluvun neliönä analyyttinen funktio, on haluttu v sen imaginääriosa

$$v(x,y)=2\mathrm{xy}$$

Arvostelu:
-oikein osoitettu harmonisuus: 1p
-oikein laskettu v: 1p
-yksittäinen pieni merkkivirhe: ei pistevähennystä

2. a) Etsi Möbius-kuvaus joka vie pisteet 0,-i ja i pisteiksi -1,0 ja ∞.

Käytetään Möbius-kuvauksille päteväa kaavaa

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

ja sijoitetaan tähän annetut pisteparit (maalijoukon pisteet z:jen paikalle) esimerkiksi näin:

$$\frac{(w+i)(0-i)}{(w-i)(0+i)}=\frac{(z-0)(-1-\infty)}{(z-\infty)(-1-0)}$$

Äärettömät voidaan supistaa pois suoraan tai käsitellä ne raja-arvoina, jolloin lausekkeen oikeaksi puoleksi saadaan

$$\frac{z-0}{-1-0}\lim_{k\to\infty}\frac{-1-k}{z-k}=-z$$

Sijoittamalla tämä takaisin ylempään kaavaan saadaan

$$\frac{(w+i)(0-i)}{(w-i)(0+i)}=-z$$

josta voidaan ratkaista z:

$$z=\frac{w-i}{w+i}$$

Pisteiden järjestystä yms. vaihtamalla voidaan päätyä myös toisennäköisiin ratkaisuihin. Luonnollisesti myös nämä hyväksytään.

[Laskutavasta riippuen äsken muodostettu kuvaus voi vaikuttaa vievän pisteen i myös pisteeksi -∞ tai i∞. Möbius-kuvauksia käsitellään kuitenkin yleensä laajennetussa kompleksitasossa, jossa <jotain>∞ on aina sama piste, riippumatta siitä onko <jotain>:n paikalla etumerkki - tai i. Positiivinen ääretön saadaan mielenrauhan vuoksi esim. kirjoittamalla

$$\lim_{k\to i}\frac{w+i}{w-i}=\lim_{k\to i}\frac{i(\frac{w}{i}+1)}{i(\frac{w}{i}-1)}=\lim_{k\to i}\frac{(\frac{w}{i}+1)}{(\frac{w}{i}-1)}=\infty$$

]
Vaihtoehtoinen ja matemaattisesti kaunis tapa on myös päätellä kuvauksen nimittäjä äärettömyysehdosta ja osoittaja kahdesta muusta pisteparista, ja vedota tämä jälkeen siihen miten kolme pisteparia määrittää Möbius-kuvauksen yksikäsitteisesti.

Arvostelu:
-Oikean kaavan käyttö: 1p
-Sievennys ja lopputulos: 0-2p
-Oikea kuvaus päättelyllä (joka selostettu oikein): 3p

b) Mikä on potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^2}{n^2}$$

kehityskeskus? Määritä sarjan suppenemissäde.

Potenssisarja on yleisesti muotoa

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

Vertailemalla lausekkeita nähdään että kehityskeskus z_0 = -i. Suppenemissäteeksi saadaan suppenemissäteen kaavalla

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)^2}=1$$

Huomattavaa on, että z-termiä ei oteta suppenemissäteen laskukaavaan, kuten monessa vastauksessa oli tehty.

Arvostelu:
-oikea kehityskeskus: 1p
-oikea menetelmä suppenemissäteelle: 1p
-oikea suppenemissäde: 1p
-z:aa suppenemissäteen kaavassa: max 2p b-kohdasta

3. a) Laske annettu polkuintegraali, jossa kärkipisteinä ovat 0,1 ja 1+i. Kiertosuunta vastapäivään.

a) Tapa 1: Annettu funktio

$$f(z)=\frac{1}{z-i}$$

on analyyttinen koko integrointipolun rajaamassa alueessa, sillä funktion napa i ei kuulu alueeseen. Alue on myös selkeästi yhdesti yhtenäinen, joten integraalin arvo on Cauchyn integraalilauseen nojalla nolla.

Hyvin harvassa vastauksessa todettiin alueen yhdesti yhtenäisyys. Tästä virheestä ei vähennetty pisteitä.

Myöskään funktion analyyttisyyttä ei todettu (pelkkä toteaminen tai vetoaminen rationaalifunktioluonteeseen riittää) erityisen usein.

Arvostelussa täysiin pisteisiin riittää kuitenkin kohtuullinen perustelu sille, miksi integraalilausetta voi käyttää. Kohtuulliseksi laskettiin analyyttisyyden toteamisen lisäksi myös se, että piste i ei kuulu integrointipolun rajaamaan alueeseen.

Cauchyn integraalikaavaa ei tässä tehtävässä voi käyttää, sillä piste i ei edelleenkään kuuluu em. alueeseen. Mikäli kaavan käyttö perusteltiin näennäisen hyvin (lähinnä funktion analyyttisyys tai väitettiin virheellisesti pisteen kuuluvan alueeseen), oli kohdasta mahdollista saada yksi piste.

Tapa 2: Polkuintegraalin voi laskea myös parametrisoimalla polun ja laskemalla integraalin. Tämän arvostelusta ja laskutavasta lisää seuraavassa kohdassa.

Arvostelu:
-Integraalilause riittävin perusteluin: 3p
-Integraalilause vaillinaisin perusteluin: max 2p
-Cauchyn integraalikaava: max 1p
TAI:
-Oikea parametrisointi: 1p
-Muuttujanvaihto: 1p
-Integrointi + oikea tulos: 1p
-Yksittäinen pieni merkkivirhe: ei vaikutusta pisteytykseen
-Väärä kiertosuunta tai väärä kolmio: max 2p

b) Nyt funktiona oli f(z) = Im[z].

Funktio ei ole analyyttinen, joten Cauchyn integraalilausetta ei voi käyttää. Mikäli vastauksessa oli tehty näin, voi tehtävästä saada maksimissaan yhden pisteen. Tämä edellytti lauseen käytön perustelua (esim. funktion väittämistä analyyttiseksi).

Oikea laskutapa on parametrisoida polkuintegraali esimerkiksi seuraavalla tavalla:

Polku 0 → 1

$$z_1(t)=t\,,\,t=0...1$$

Polku 1 → 1+i

$$z_2(t)=1+it\,,\,t=0...1$$

Polku 1+i → 0

$$z_3(t)=(1-t)+i(1-t)$$

Näin saadaan integrointidifferentiaaleiksi

$$\begin{aligned} dz&=dt(\,polku\,1) \\ dz&=idt(\,polku\,2) \\ dz&=(-1-i)\,dt(\,polku\,3) \end{aligned}$$

ja itse integraaleiksi

1: $\int_0^1 Imag\,(t)\,dt=\int_0^1 0\,dt=0$

2: $\int_0^1 Imag\,(1+it)\,idt=\int_0^1 t\,idt=\frac{i}{2}$

3: $\int_0^1 Imag\,((1-t)+i(1-t))(-1-i)dt=-(1+i)\int_0^1 1-t\,dt=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

joista summaamalla koko integraalin arvoksi

$$-\frac{1}{2}$$

Huomattavaa on, että kun z_i:stä (i=1...3, kun z parametrisoitu) otetaan imaginääriosa, on tulos puhtaasti reaalinen. Imaginääriosalla tarkoitetaan siis yleisesti i:n kerrointa. Tässä tehtiin virheitä useammassa kokeessa.

Integraalin arvoa hämmästeltiin joissakin koepapereissa. Nollasta poikkeava arvo selittyy sillä, ettei funktio ole analyyttinen. Tällöin polkuintegraalin arvo riippuu myös itse polusta eikä vain sen päätepisteistä.

Arvostelu:

-Parametrisointi: 1p
-Muuttujanvaihto: 1p
-Integrointi: 1p
-Integroitavassa funktiossa esiintyy i:tä: max 2p

S3 S2011 VK1 tehtävän 4 malliratkaisu ja pisteytys

Tehtävänä on laskea trigonometrinen integraali käyttäen Residy-menetelmää. Havaitaan, että kun $z = z(\theta) = e^{i\theta}$ niin

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \tag{1}$$

$$z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta. \tag{2}$$

Eli trigonometriset funktiot voidaan esittää kompleksiluvun z avulla. Suoritetaan siis integraaliin muuttujan vaihto $\theta \to z$. Muuntokertoimeksi saadaan:

$$dz = \frac{\partial z(\theta)}{\partial \theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta, \tag{3}$$

$$d\theta = \frac{1}{iz} dz. \tag{4}$$

Itse integraaliksi tulee siis:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = \oint_C \frac{(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))^2}{5 - 4(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))} \frac{1}{iz} dz \tag{5}$$

$$= \frac{i}{4} \oint_C \frac{(z - \frac{1}{z})^2}{5z - 2z(z + \frac{1}{z})} dz \tag{6}$$

$$= \frac{i}{4} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(5z - 2z^2 - 2)} dz \tag{7}$$

$$= \frac{i}{4} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^2}{-2z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz \tag{8}$$

$$= -\frac{i}{8} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz \tag{9}$$

missä C kiertää yksikköympyrän kehän kerran vastapäivään. Tämä sijoitus johtaa rationaalifunktion integraaliin. Rationaalifunktio on *analyyttinen*, joten integraalin arvo saadaan laskettua Residylauseella.

Nimittäjällä on kolme nollakohtaa $\{0, \frac{1}{2}, 2\}$. Näistä kaksi ensimmäistä sijaitsevat yksikköympyrän sisäpuolella. Näistä ensimmäinen on toisen kertaluvun napa ja kaksi jälkimmäistä ensimmäisen kertaluvun napoja.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) \tag{10}$$

$$= 2\pi i (\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)). \tag{11}$$

Lasketaan Residyt:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)} \tag{12}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{(z^2-1)^2}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} \tag{13}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(z^2-1)^2}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} \left[\frac{4z}{z^2-1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z-2}\right] \tag{14}$$

$$= \frac{5}{2}, \tag{15}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} (z-\frac{1}{2}) \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)} \tag{16}$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-2)} = -\frac{3}{2}. \tag{17}$$

Eli:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = -\frac{i}{8} \oint_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)} dz \tag{18}$$

$$= -\frac{i}{8} 2\pi i (\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)) \tag{19}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4}. \tag{20}$$

Pisteytys noudattaa seuraavia periaatteita:

- 0 p. Integraali on laskettu muutoin kuin Residylauseen avulla (esimerkiksi numeerisesti tai trigonometrisellä sijoituksella).
- +1 p. Idean keksimisestä (integraalin muuntaminen sijoituksella, parametrisaatiolla tai muulla vastaavalla tavalla).
- +1 p. Oikean sijoituksen käyttö.
- −0 p. Integrointipolkua ei ole mainittu. (Tämä pitää aina tehdä, mutta koska kyseessä on "insinöörimatematiikka"...)
- −1 p. Yksikköympyrän ulkopuolisen navan Residy on otettu mukaan laskuun.
- +1 p. Oikein käytetty Residylause.
- +2 p. Oikein lasketut Residyt. Piste kummastakin.
- +1 p. Oleelliselta muodoltaan oikea lopputulos.
- $-\frac{1}{2}$ p. Pieni virhe. Tätä kohtaa voidaan soveltaa useaan otteeseen.

Tehtävän pisteet arvioidaan näillä kriteereillä, minkä jälkeen ne pyöristetään normaalien pyöristyssääntöjen mukaan kokonaisiksi pisteksi. Negatiiviset pistemäärät vastaavat 0 p suoritusta.