Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila/Murtola

Mat-1.1230 peruskurssi S3 — Syksy 2011

2. välikoe — Ti 15.11.2011 klo 16.00-19.00

Kokeessa saa käyttää ylippilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - 4y(n) = 1, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 0.$$

2. Olkoon $f(t) = t(a-t)$, kun $0 < t < a$. Laske funktion $f(t)$ Fourier-sarja (f:n jakso on a).

3. Osoita Fourier-muunnosta $\mathcal{F}\{1/(1+t^2)\} = \pi e^{-|\omega|}$ ja Parsevalin yhtälöä käyttämällä, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Ratkaise $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ LU-hajotelmaa käyttäen, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vihje: Seuraavista kaavoista saattaa olla apua tehtävien ratkaisemisessa.

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),\ Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$

Parselvalin yhtälöt:

$$\frac{2}{T}\int_r^{r+T} f(t)^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega.$$

Matematiikan peruskurssi S3
Syksy 2011
Välikoe 2
Malliratkaisut tehtäviin 1 ja 3

Tehtävä 1

Z-muunnetaan annettu differenssiyhtälö

$$y(n+2)-4\mathrm{y}(n)=1$$

puolittain jolloin saadaan

$$z^2 Y(z)-z^2 y(0)-z\,y(1)-4\mathrm{Y}(z)=\frac{z}{z-1}$$

Sijoittamalla annetut alkuarvot y(0) = 1 ja y(1) = 0 saadaan

$$Y(z)(z^4-4)=\frac{z}{z-1}+z^2=\frac{z(z^2-z+1)}{z-1}$$

ja edelleen

$$Y(z)=\frac{z(z^2-z+1)}{(z-1)(z^2-4)}$$

Hoksataan käyttää z^2-4 -termiin binomikaavaa ja lasketaan lausekkeelle Y(z)/z osamurtohajotelma

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{(z^2-z+1)}{(z-1)(z^2-4)}=\frac{(z^2-z+1)}{(z-1)(z-2)(z+2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z+2}$$

Tapa 1
Ratkaisemalla osamurtohajotelma (tämä löytyy esim. Z-muunnosharjoituskierroksen malliratkaisuista) saadaan

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{-1}{3}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z-2}+\frac{7}{12}\frac{1}{z+2}$$

ja edelleen

$$Y(z)=\frac{-1}{3}\frac{z}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{z}{z-2}+\frac{7}{12}\frac{z}{z+2}$$

Tämä voidaan kääntää suoraan käänteismuunnostaulukoilla

$$y(n)=\frac{-1}{3}+\frac{3}{4}2^n+\frac{7}{12}(-2)^n$$

Tapa 2
Käänteismuunnos saadaan laskettua myös integraalista

$$y(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint z^{k-1}\frac{z(z^2-z+1)}{(z-1)(z-2)(z+2)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z^k(z^2-z+1)}{(z-1)(z-2)(z+2)}dz$$

missä integrointipolku kiertää kaikki integrandin navat. Tällä kertaa z^{k-1}:llä kertominen ei luo uusia napoja edes silloin kun k=0. Integraali voidaan laskea residymenetelmällä. Integrandin (kutsutaan sitä nimellä g(z)) kaikki navat ovat yksinkertaisia, joten laskemisessa ei pitäisi olla ongelmia. Saadaan

$$Res_{z=1}\,g(z)=\lim_{k\to1}(z-1)g(z)=\lim_{k\to1}\frac{z^k(z^2-z+1)}{(z-2)(z+2)}=\frac{-1}{3}$$

ja vastaavasti

$$Res_{z=2}\,g(z)=\frac{3}{4}2^n$$
$$Res_{z=-2}\,g(z)=(-2)^n\frac{7}{12}$$

ja näistä ratkaisuksi

$$y(n)=\frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left(\frac{-1}{3}+\frac{3}{4}2^n+\frac{7}{12}(-2)^n\right)=\frac{-1}{3}+\frac{3}{4}2^n+\frac{7}{12}(-2)^n$$

eli sama tulos kuin aiemminkin.

Pisteytys
-differenssiyhtälön z-muunnos 0-2p
    *1 ”z-muunnettu” väärin ykköseksi => max 1p / tämä kohta
-käänteismuunnos 0-3p
    *osamurtomenetelmän oikea aloitus 1p
    *osamurtohajotelman A,B ja C väärin (todella yleinen virhe) => -1p
    *oikein aloitettu residymenetelmä 2p
    *oikea lopputulos hajotelmilla tai residyillä 3p
    *lopputuloksessa z-käänteismuuntamattomia termejä => max 4p / tehtävä
-lopputuloksen toteaminen (alleviivaus, ”Vastaus: --” tms.) 1p

Tehtävä 3
Tehtävässä piti osoittaa että

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}$$

Käytetään vihjeen mukaisesti Parsevalin yhtälöä

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

Tehtävänannossa oli annettu Fourier-muunnos

$$F\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=\pi e^{-|\omega|}$$

Nyt huomataan että todistettavan yhtälön vasemmalla puolelle on intergraalin sisällä juurikin tuo $\frac{1}{1+t^2}$ neliöön korotettuna, joten saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\pi e^{-|\omega|}\right|^2 d\omega \qquad (1)$$

Oikeanpuoleisen lausekkeen eksponenttifunktio on aina posiviivinen, joten saadaan

$$\frac{\pi^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|} d\omega$$

Sieventämällä piit ja huomaamalla integrandin parillisuus saadaan edelleen

$$\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega} d\omega$$

Integraalin arvoksi saadaan yksinkertaisella integroinnilla 1, ja kertomalla tämä pii per kahdella saadaan haluttu tulos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

Arvostelu

-Integraaliyhtälön (1) muodostaminen 2p

*puutteelliset selitykset => 0-1p

-Integrointi 3p

*parillisuutta hyödynnetty => 2p

*oikean puolen integraali todettu arvoltaan yhdeksi lauseketta muokkaamatta => max 1p

-Tuloksen toteaminen 1p

*”väite on todistettu”, m.o.t., todistusneliö riittää

2. **S3 2.VK 2011 +2 ja 4.**

$f(t) = t(a-t)$, $0 < t \leq a$; a-jaksollinen. $(T=a)$

$$\underbrace{f(-t) = f(-t+a)}_{\text{jaksollisuus}} = (-t+a)(a+t-a) = t(a-t) = f(t) \Rightarrow \text{parillinen}$$

+1p

Tapa 1: reaalinen sarja:

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{a} \quad \textbf{+1p}$$

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_0^a t(a-t)\,dt = \frac{2}{a}\Big/_0^a \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{3}t^3 = \frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{1}{3}a^2$$

+1p **+1p (*)**

$$a_k = \frac{2}{a}\int_0^a t(a-t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \textbf{+1p}$$

$$= \frac{2}{a}\left(\underbrace{\Big/_0^a \frac{1}{k\omega}t(a-t)\sin(k\omega t)}_{0-0} - \int_0^a \frac{1}{k\omega}(a-2t)\sin(k\omega t)\,dt\right) \quad \textbf{+1p}$$

$$= \frac{2}{a}\left(\frac{1}{(k\omega)^2}\Big/_0^a a\cos(k\omega t) + \frac{1}{(k\omega)^2}\Big/_0^a(-2t)\cos(k\omega t) - \frac{1}{(k\omega)^2}\int_0^a(-2)\cos(k\omega t)\right.$$

$$= \frac{2}{a}\left(\frac{a}{(k\omega)^2}\Big(\underbrace{\cos(2\pi k)}_{1} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\Big) + \frac{-2a}{(k\omega)^2}\Big(\underbrace{\cos(2\pi k)}_{1}\Big) + \underbrace{\frac{2}{(k\omega)^3}\Big/_0^a \sin(k\omega t)}_{0-0}\right)$$

$$= -\frac{4}{(k\omega)^2} = -\frac{a^2}{(\pi k)^2} \quad \textbf{+1p (*)}$$

$$b_k = 0 \ (\text{parillisuus}) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{6}a^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^2}{(\pi k)^2}\cos(k\omega t) \quad \textbf{+1p (*)}$$

(*) yht max 1p

Tapa 2: kompleksinen sarja:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{a}$$

+1p (+1p vaikka parillisuutta)

$k=0$:

$$c_k = c_0 = \frac{1}{a}\int_0^a t(a-t)e^{i\cdot 0\cdot\omega t}\,dt = \ldots = \frac{1}{6}a^2 \quad \textbf{+1p (*)}$$

+1p

$k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{a}\int_0^a t(a-t)e^{ik\omega t}\,dt$$

+1p

$\hookrightarrow$

$$= \frac{1}{a}\left(\Big/_{0}^{a} \frac{1}{ik\omega} \underbrace{t(a-t) e^{ik\omega t}}_{0} - \int_0^a \frac{1}{ik\omega}(a-2t)e^{ik\omega t}\, dt \right)$$ **+1p**

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(k\omega)^2} \Big/_{0}^{a} a e^{ik\omega t} + \frac{1}{(k\omega)^2}\Big/_{0}^{a} (-2t)e^{ik\omega t} + \frac{1}{(k\omega)^2}\int_0^a 2 e^{ik\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a}{(k\omega)^2}\left(\underbrace{e^{i2\pi k}}_{1} - \underbrace{e^{0}}_{1}\right) - \frac{2}{(k\omega)^2}\left(a\underbrace{e^{i2\pi k}}_{1} - 0\right) - \frac{2}{(ik\omega t)^3}\underbrace{\Big/_{0}^{a} e^{ik\omega t}}_{1-1}\right)$$

$$= -\frac{2}{(k\omega)^2} = -\frac{a^2}{2(\pi k)^2}$$ **+1p (*)**

$$f(t) = \frac{1}{6}a^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \neq 0}}^{\infty} -\frac{a^2}{2(\pi k)^2} e^{ik\omega t}$$ **+1p (*)**

(*) yht max 1p

7.4 tehdään A:n LU-hajotelma:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = LU$$

+2p

Tapa 1:

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 = l_{21} \\ 2 = l_{31} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix} -5 = l_{32}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U \quad ; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

+2p

Tapa 2:

$$A = LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{11}l_{21} & u_{12}l_{21} + u_{22} & u_{13}l_{21} + u_{23} \\ u_{11}l_{31} & u_{12}l_{31} + u_{22}l_{32} & u_{13}l_{31} + u_{23}l_{32} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow u_{11} = 3$; $u_{12} = -7$; $u_{13} = -2$

$\Rightarrow l_{21} = -1$; $u_{22} = -2$; $u_{23} = -1$

$\Rightarrow l_{31} = 2$; $l_{32} = -5$; $u_{33} = -1$

$\Rightarrow$ samat.

+2p

Ratkaistaan nyt $Ax = b$ (tai $= y$ yleisellä y, kuten tehtävänanto tarkasti tulkiten halusi; tätä ei kuitenkaan tässä esitetä).

$$Ax = b$$
$$L\underbrace{Ux}_{y} = b$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

+1p

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

+1p