Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila/Murtola

Mat-1.1230 peruskurssi S3

3. välikoe — Syksy 2011

Ma 12.12.2011 klo 13.00-16.00

Kokeessa saa käyttää ylippilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. (a) Mitä tarkoittaa yhtälöryhmän ratkaiseminen pienimmän neliösumman mielessä? Mitä sovelluksia pienimmän neliösumman ratkaisuilla on käytännön tilanteissa?

(b) Etsi käsin laskemalla tai kirjoittamalla ratkaisun etsivä MATLAB-koodi yhtälön $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisu, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Etsi käsin laskemalla tai esittämällä MATLAB-koodi matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

singulaariarvohajotelma ja häiriöalttius $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$.

(b) Mitä matriisin häiriöalttius tarkoittaa geometrisesti? Miten häiriöalttius liittyy singulaariarvoihin?

3. Etsi differentiaaliyhtälösysteemin $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t)$ yleinen ratkaisu, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Hollantilainen sähköinsinööri Balthasar van der Pol esitti työskennellessään Philipsillä epälineaarisen yhtälön

$$x'' - (1 - x^2)x' + x = 0,$$

joka liittyy oskillaattorien mallintamiseen. Esitä Van der Pollin yhtälö ryhmänä ensimmäisen asteen yhtälöitä ja linearisoi se tasapainopisteen $(0,0)$ ympäristössä.

Vihje: Viereisellä sivulla olevat kaavat voivat virkistää muistia.

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Epähomogeeninen systeemi:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{u} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s)\,ds.$$

Matriisinormi:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{z}\|=1} \|\mathbf{Az}\|.$$

Häiriöalttius:

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|.$$

Normaaliyhtälöt:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{Az} = \mathbf{A}^*\mathbf{c},$$

$$\mathbf{Rz} = \mathbf{Q}^*\mathbf{c}.$$

Gram-Schmidt:

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \quad (1)$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1} - \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 - \ldots - \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{q}_k \rangle \mathbf{q}_k \quad (3)$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \frac{\mathbf{v}_{k+1}}{\|\mathbf{v}_{k+1}\|} \quad (4)$$

$$\to \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}.$$