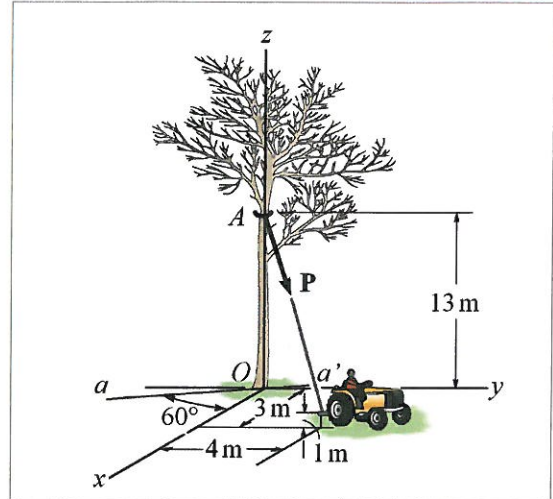


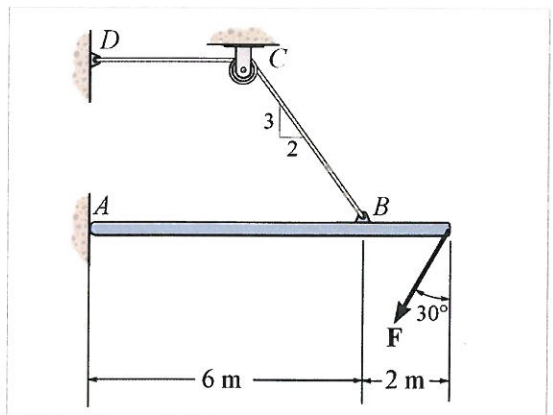
1. Puuta vedetään voimalla, jonka suuruus on  $P = 800 \text{ N}$ . Määritä voiman  $\mathbf{P}$  momenttivektori pisteeseen  $O$  suhteen. Köysi kiinnittyy traktoriin pisteessä  $(3, 4, 1) \text{ m}$ .

Mikä on voiman  $\mathbf{P}$  momentin suuruus suoran  $aa'$  suuntaisen akselin suhteen?

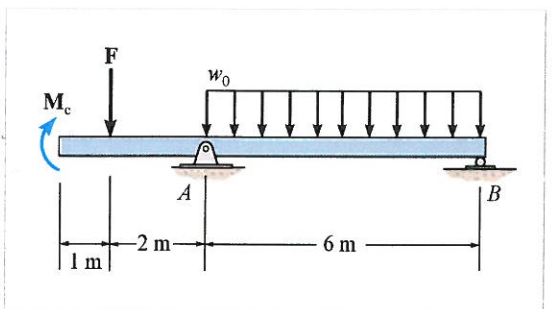


2. Sauva on tuettu köydellä pisteestä  $B$  ja päästään  $A$  se tukeutuu seinään kitkan välityksellä. Määritä köydessä vaikuttava voima ja sauvan päähän kohdistuva kitkavoima, kun sauvan paino on  $900 \text{ N}$  ja  $F = 600 \text{ N}$ . Sauvan paksuutta ei oteta huomioon, ja köysipyörä  $C$  on kitkaton.

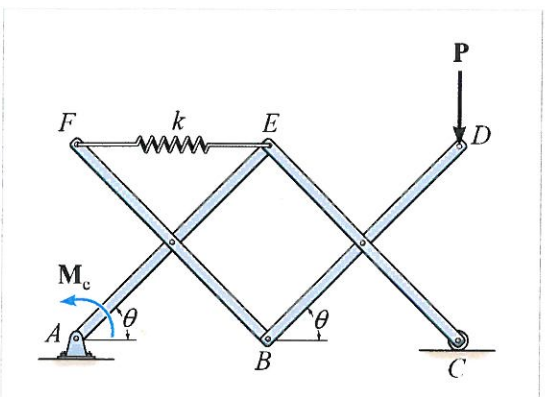
Kuinka suuri voima vaikuttaa köyden kiinnityspisteessä  $D$  ja mikä on seinän ja sauvan pään  $A$  välisen lepokitkakertoimen  $\mu_s$  pienin sallittu arvo?



3. Määritä palkin leikkausvoima- ja taivutusmomenttijakaumat ja piirrä kuviot, kun  $M_c = 4 \text{ kNm}$ ,  $F = 5 \text{ kN}$  ja  $w_0 = 3 \text{ kN/m}$ . Ilmoita lisäksi palkin rasitetuimmat poikkileikkaukset.

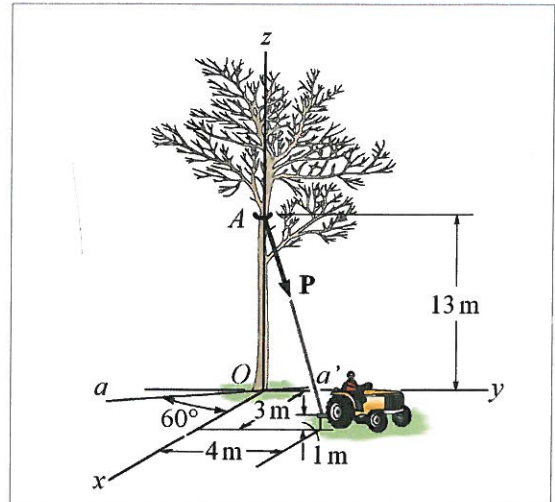


4. Neljästä sauvasta ja jousesta koostuva mekanismi on tuettu niveltuella  $A$  ja rullalla  $C$ . Sauvojen pituus on  $2 \text{ m}$ . Jousen jousivakio on  $k = 2 \text{ kN/m}$  ja se on venymätön, kun  $\theta = 45^\circ$ . Mekanismin kohdistuvat voimaparin momentti  $M_c$  ja pystysuora voima  $\mathbf{P}$ , jonka suuruus on  $P = 3 \text{ kN}$ . Määritä voimaparin momentin suuruus  $M_c$ , kun  $\theta = 30^\circ$  ja mekanismi on tasapainossa. Mekanismin omaa painoa ei oteta huomioon.



1. Puuta vedetään voimalla, jonka suuruus on  $P = 800$  N. Määritä voiman  $\mathbf{P}$  momenttivektori pisteen  $O$  suhteen. Köysi kiinnittyy traktoriin pisteessä  $(3, 4, 1)$  m.

Mikä on voiman  $\mathbf{P}$  momentin suuruus suoran  $aa'$  suuntaisen akselin suhteen?



1. Voimavektori  $\bar{\mathbf{P}}$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}} &= P \bar{\mathbf{u}}_{AB} = P \frac{\bar{\mathbf{r}}_{AB}}{r_{AB}} \\ &= 800 \text{ N} \frac{3\bar{\mathbf{i}} + 4\bar{\mathbf{j}} - 12\bar{\mathbf{k}}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = \left\{ \frac{2,4}{13}\bar{\mathbf{i}} + \frac{3,2}{13}\bar{\mathbf{j}} - \frac{9,6}{13}\bar{\mathbf{k}} \right\} \text{ kN}\end{aligned}$$

2. Momenttivektori  $\bar{\mathbf{M}}_O$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_O &= \bar{\mathbf{r}}_{OA} \times \bar{\mathbf{P}} = \{13\bar{\mathbf{k}}\} \text{ m} \times \left\{ \frac{2,4}{13}\bar{\mathbf{i}} + \frac{3,2}{13}\bar{\mathbf{j}} - \frac{9,6}{13}\bar{\mathbf{k}} \right\} \text{ kN} \\ &= \{-3,2\bar{\mathbf{i}} + 2,4\bar{\mathbf{j}}\} \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 2,4 & 3,2 & -9,6 & \end{array} \right) \text{ kNm} = \{-3,2\bar{\mathbf{i}} - (-2,4\bar{\mathbf{j}})\} \text{ kNm}$$

3. Momentin suuruus  $M_a$

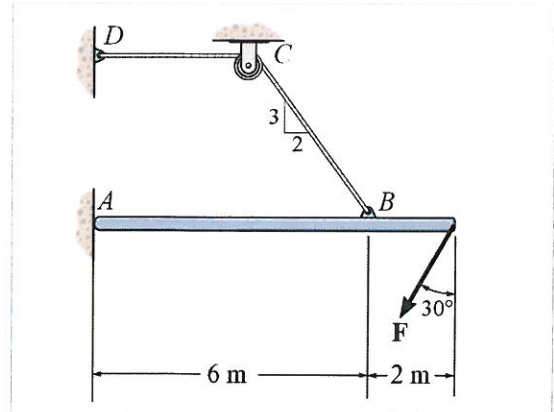
$$\bar{\mathbf{u}}_a = \cos 60^\circ \bar{\mathbf{i}} - \sin 60^\circ \bar{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\mathbf{j}}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_a = (\bar{\mathbf{M}}_O \cdot \bar{\mathbf{u}}_a) \bar{\mathbf{u}}_a$$

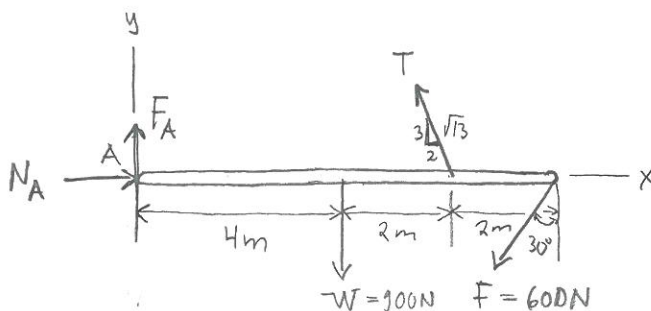
$$\begin{aligned}M_a &= |\bar{\mathbf{M}}_a| = |\bar{\mathbf{M}}_O \cdot \bar{\mathbf{u}}_a| |\bar{\mathbf{u}}_a| = |\bar{\mathbf{M}}_O \cdot \bar{\mathbf{u}}_a| = \left| (-3,2\bar{\mathbf{i}} + 2,4\bar{\mathbf{j}}) \cdot \left( \frac{1}{2}\bar{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\mathbf{j}} \right) \right| \text{ kNm} \\ &= \left| -1,6 + 1,2\sqrt{3} \right| \text{ kNm} = 3,68 \text{ kNm}\end{aligned}$$

2. Sauva on tuettu köydellä pisteestä  $B$  ja päästään  $A$  se tukeutuu seinään kitkan välityksellä. Määritä köydessä vaikuttava voima ja sauvan päähän kohdistuva kitkavoima, kun sauvan paino on  $900\text{ N}$  ja  $F = 600\text{ N}$ . Sauvan paksuutta ei oteta huomioon, ja köysipyörä on kitkaton.

Kuinka suuri voima vaikuttaa köyden kiinnityspisteessä  $D$  ja mikä on seinän ja sauvan pään  $A$  välisen lepokitkakertoimen  $\mu_s$  pienin sallittu arvo?



### 1. Sauvan vkk



(2p)

### 2. Sauvan tasapaino

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad \frac{3}{\sqrt{13}} T(6\text{m}) - W(4\text{m}) - F \cos 30^\circ 8\text{m} = 0 \Rightarrow T = \left(200 + \frac{400}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{13}\text{ N} \\ \approx 1,55\text{ kN} \quad (1,554\text{ kN})$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_A - W + \frac{3}{\sqrt{13}} T - F \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F_A = (300 - 100\sqrt{3})\text{ N} \\ \approx 127\text{ N} \quad (126,8\text{ N})$$

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_A - \frac{2}{\sqrt{13}} T - F \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow N_A = \left(700 + \frac{800}{\sqrt{3}}\right)\text{ N} \\ \approx 1,162\text{ kN}$$

Vastaus: - köysivoima:  $T = 1,55\text{ kN}$

- kitkavoima:  $F_A = 127\text{ N}$ , suunta ylöspäin eli sauvan pää  $A$  pyrkii liukumaan alaspäin.

(3p)

3. Kiinnityspisteessä  $D$  vaikuttavan voiman suuruus on sama kuin köysivoiman, eli  $1,55\text{ kN}$ , koska köysipyörä on kitkaton.

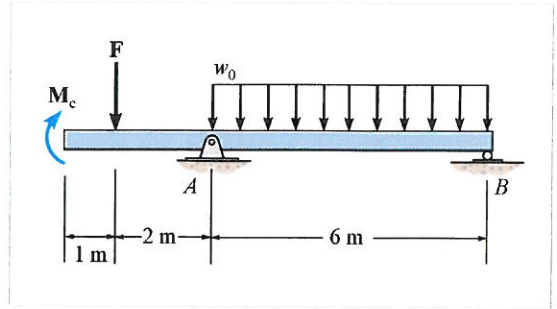
(0,5p)

4. Kun sauvan pää  $A$  pysyy paikallaan, pätee  $F_A < \mu_s N_A \Rightarrow \mu_s > \frac{F_A}{N_A} \approx 0,11$

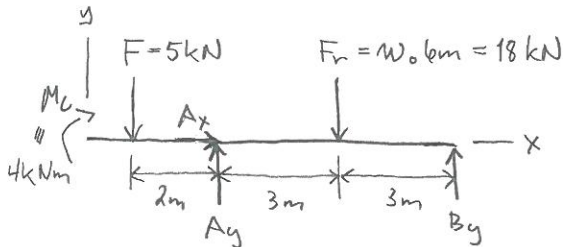
(0,1051)

(0,5p)

3. Määritä palkin leikkausvoima- ja taivutusmomenttijakaumat ja piirrä kuviot, kun  $M_c = 4 \text{ kNm}$ ,  $F = 5 \text{ kN}$  ja  $w_0 = 3 \text{ kN/m}$ . Ilmoita lisäksi palkin rasitetuimmat poikkileikkaukset.



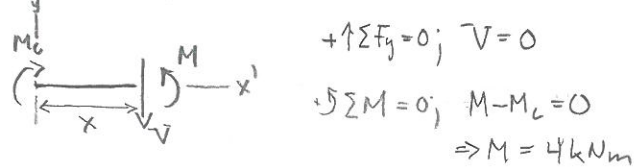
1. Palkin tukivoimat



$$\begin{aligned} \pm \sum F_x &= 0; & A_x &= 0 \\ \pm \sum M_B &= 0; & A_y \cdot 6\text{m} + M_c - F \cdot 8\text{m} - F_r \cdot 3\text{m} &= 0 \\ & \Rightarrow A_y &= 15 \text{ kN} \\ + \uparrow \sum F_y &= 0; & A_y + B_y - F - F_r &= 0 \Rightarrow B_y = 8 \text{ kN} \end{aligned} \quad (1\text{p})$$

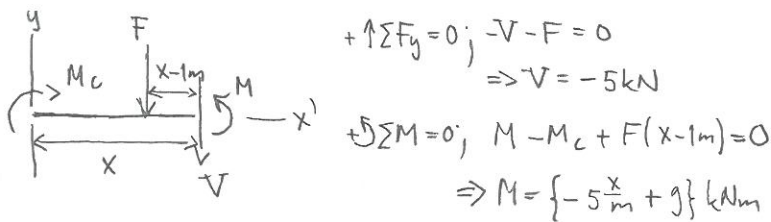
2. V- ja M-jakaumat

- väli  $0 \leq x < 1\text{m}$ :



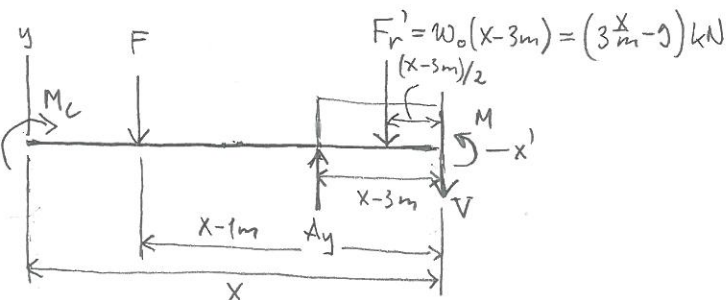
$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0; & V &= 0 \\ \pm \sum M &= 0; & M - M_c &= 0 \\ & \Rightarrow M &= 4 \text{ kNm} \end{aligned}$$

- väli  $1 \leq x < 3\text{m}$ :



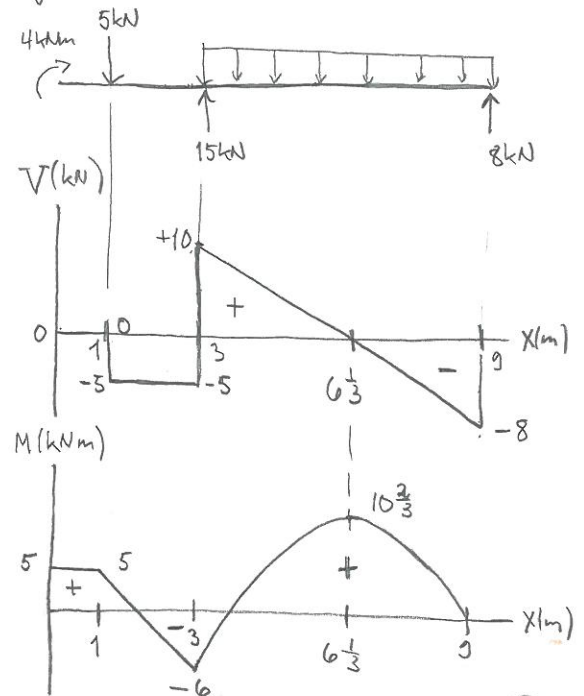
$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0; & -V - F &= 0 \\ & \Rightarrow V &= -5 \text{ kN} \\ \pm \sum M &= 0; & M - M_c + F(x-1\text{m}) &= 0 \\ & \Rightarrow M &= \left\{ -5 \frac{x}{\text{m}} + 9 \right\} \text{ kNm} \end{aligned}$$

- väli  $3 \leq x < 9\text{m}$ :



$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0; & A_y - V - F - F_r' &= 0 \\ & \Rightarrow V &= \left\{ -3 \frac{x}{\text{m}} + 19 \right\} \text{ kN} \\ \pm \sum M &= 0; & M - M_c + F(x-1\text{m}) - A_y(x-3\text{m}) + F_r' \frac{x-3\text{m}}{2} &= 0 \\ & \Rightarrow M &= \left\{ -\frac{3}{2} \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^2 + 19 \frac{x}{\text{m}} - \frac{19}{2} \right\} \text{ kNm} \\ M_{\text{max}}: & V = 0 \Rightarrow x = \frac{19}{3} \text{ m} \Rightarrow M_{\text{max}} = M\left(\frac{19}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ kNm} \approx 10,7 \text{ kNm} \end{aligned}$$

3. V- ja M- kuviot



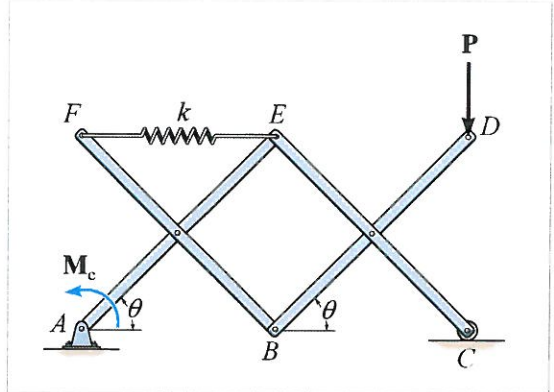
4. Rasitetuimmat poikkileikkaukset

$$\begin{aligned} |V|_{\text{max}} &= 10 \text{ kN}, \text{ kun } x = 3 \text{ m} \\ |M|_{\text{max}} &= 10 \frac{2}{3} \text{ kNm}, \text{ kun } x = 6 \frac{1}{3} \text{ m} \end{aligned}$$

(3p)

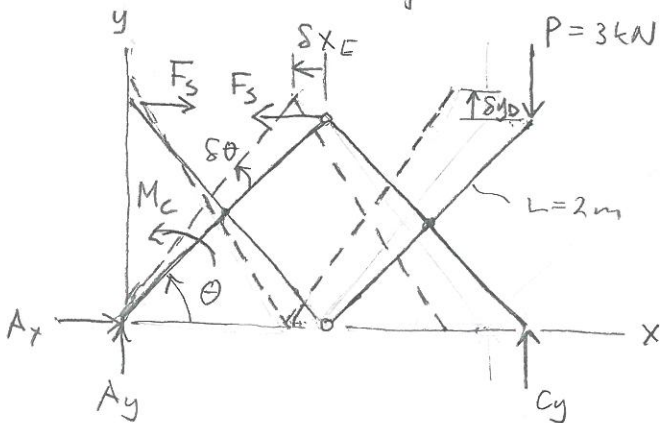


4. Neljästä sauvasta ja jousesta koostuva mekanismi on tuettu niveltuella  $A$  ja rullalla  $C$ . Sauvojen pituus on 2 m. Jousen jousivakio on  $k = 2 \text{ kN/m}$  ja se on venymätön, kun  $\theta = 45^\circ$ . Mekanismiin kohdistuvat voimaparin momentti  $M_c$  ja pystysuora voima  $P$ , jonka suuruus on  $P = 3 \text{ kN}$ . Määritä voimaparin momentin suuruus  $M_c$ , kun  $\theta = 30^\circ$  ja mekanismi on tasapainossa. Mekanismin omaa painoa ei oteta huomioon.



I Ratkaisu virtuaalisen työn periaatteella.

1. Mekanismin VKK ja virtuaaliset siirtymät



kulma  $\theta$  on riippumaton muuttuja.

$$x_E = L \cos \theta = \{2 \cos \theta\} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta x_E = \{-2 \sin \theta \delta \theta\} \text{ m}$$

$$x_F = 0 \Rightarrow \delta x_F = 0$$

$$y_D = L \sin \theta = \{2 \sin \theta\} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta y_D = \{2 \cos \theta \delta \theta\} \text{ m}$$

jousivoima:  $F_s = k s = k(x_E - x_E^0) = kL(\cos \theta - \cos \theta^0)$ ,  $\theta^0 = 45^\circ$   
 $= 4(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ kN}$

2. Virtuaalisen työ

$$\delta U = M_c \delta \theta + (-F_s) \delta x_E + (-P) \delta y_D$$

$$= \left\{ \left[ \frac{M_c}{\text{kNm}} + 8(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sin \theta - 6 \cos \theta \right] \delta \theta \right\} \text{ kJ}$$

(4,5 p)

3. Tasapaino

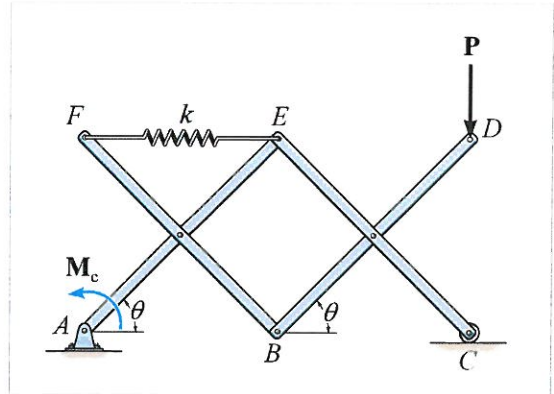
$$\delta U = 0 \quad \forall \delta \theta, \quad \text{jos} \quad \frac{M_c}{\text{kNm}} + 8(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sin \theta - 6 \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{Kun } \theta = 30^\circ, \quad M_c = \{6 \cos 30^\circ - 8(\cos 30^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sin 30^\circ\} \text{ kNm}$$

$$= \{ \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \} \text{ kNm} \approx 4,56 \text{ kNm}$$

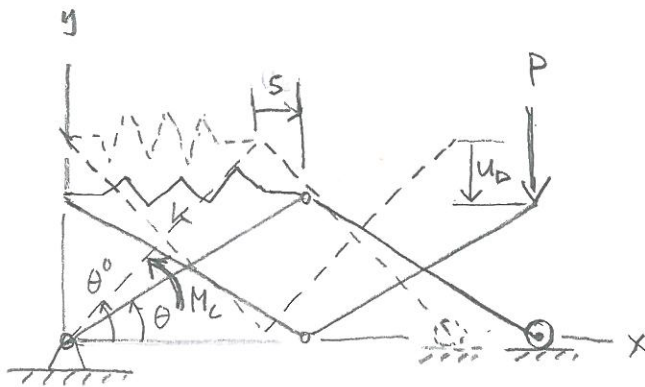
(1,5 p)

4. Neljästä sauvasta ja jousesta koostuva mekanismi on tuettu niveltuella  $A$  ja rullalla  $C$ . Sauvojen pituus on  $2\text{ m}$ . Jousen jousivakio on  $k = 2\text{ kN/m}$  ja se on venymätön, kun  $\theta = 45^\circ$ . Mekanismin kohdistuvat voimaparin momentti  $M_c$  ja pystysuora voima  $P$ , jonka suuruus on  $P = 3\text{ kN}$ . Määritä voimaparin momentin suuruus  $M_c$ , kun  $\theta = 30^\circ$  ja mekanismi on tasapainossa. Mekanismin omaa painoa ei oteta huomioon.



## II Potentiaalienergian stationaarisuuden periaate

### 1. Mekanismin potentiaalienergia



$$s = x_E - x_E^0 = 2m(\cos\theta - \cos\theta^0) = 2(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}})m$$

$$u_D = y_D^0 - y_D = 2m(\sin\theta^0 - \sin\theta) = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\theta)m$$

$$V = \frac{1}{2}ks^2 - Pu_D - (M_c(\theta - \theta^0)) = \left\{ 4(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 6(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\theta) - \frac{M_c}{\text{kNm}}(\theta - \theta^0) \right\} \text{ kJ} \quad (4,5\text{p})$$

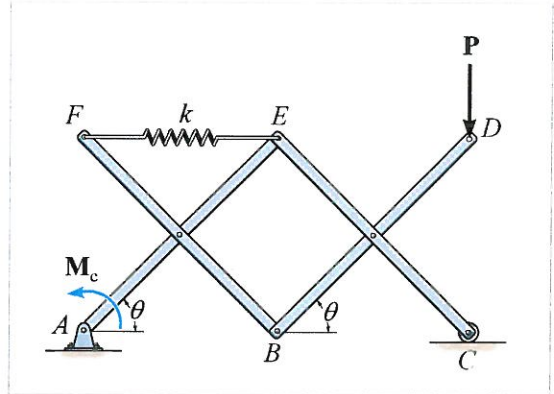
### 2. Tasapaino

$$\frac{dV}{d\theta} = \left\{ -8(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}})\sin\theta + 6\cos\theta - \frac{M_c}{\text{kNm}} \right\} \text{ kJ}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0, \quad \text{jos} \quad -8(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}})\sin\theta + 6\cos\theta - \frac{M_c}{\text{kNm}} = 0$$

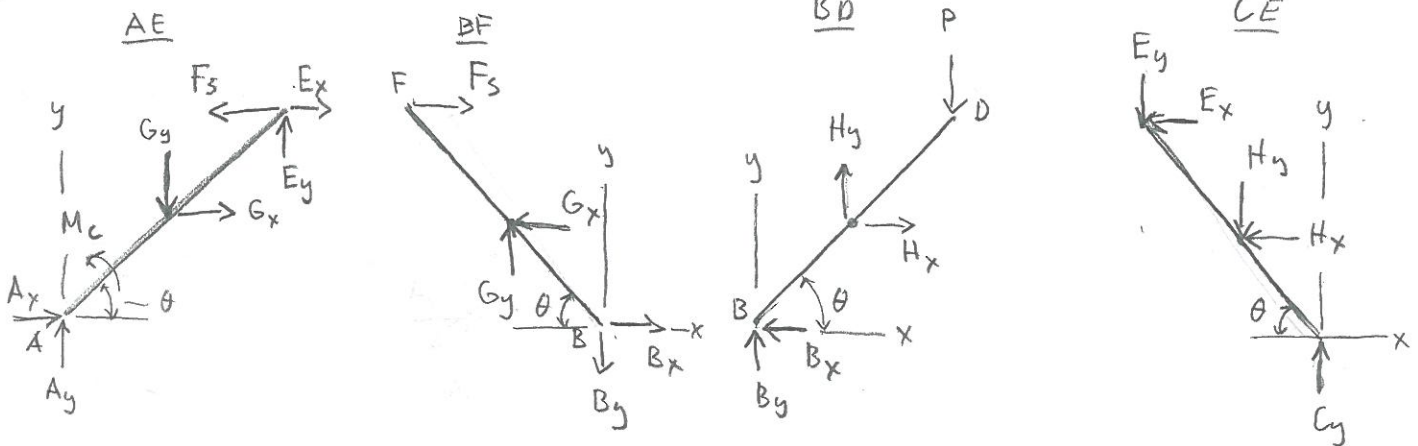
$$\Rightarrow \text{Kun } \theta = 30^\circ, \quad M_c = \{ \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \} \text{ kNm} \approx 4,56 \text{ kNm} \quad (1,5\text{p})$$

4. Neljästä sauvasta ja jousesta koostuva mekanismi on tuettu niveltuella  $A$  ja rullalla  $C$ . Sauvojen pituus on  $2\text{ m}$ . Jousen jousivakio on  $k = 2\text{ kN/m}$  ja se on venymätön, kun  $\theta = 45^\circ$ . Mekanismiin kohdistuvat voimaparin momentti  $M_c$  ja pystysuora voima  $P$ , jonka suuruus on  $P = 3\text{ kN}$ . Määritä voimaparin momentin suuruus  $M_c$ , kun  $\theta = 30^\circ$  ja mekanismi on tasapainossa. Mekanismin omaa painoa ei oteta huomioon.



III Tasapainoyhtälöiden  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  ja  $\sum \vec{M}_0 = \vec{0}$  avulla.

1. Osien vektorit



(3p)

2. Osien tasapaino

kirjoitetaan kullekin osalle tasapainoyhtälöt  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$  ja  $\sum M_0 = 0$  yhteensä 12 kpl ja ratkaistaan  $M_c$ .

(3p)