

**Huom! Tenttisuorituksen arvosteleminen edellyttää, että kaikki kolme koti-  
tehtävää ovat hyväksytysti suoritettut ennen tenttiä.**

**Tehtävä 1** (10p)

- (a) Määrittele seuraavat käsitteet: *malli*, *täydellinen todistusjärjestelmä* ja *rat-  
keavuus*. (3 × 2p)
- (b) Mitä tarkoitetaan merkinnällä  $\Sigma \models \phi$ ? Osoita yksityiskohtaisesti, että jos  $\Sigma \models \phi$  ja  $\Sigma \models \psi$ , niin  $\Sigma \models \phi \wedge \psi$ . (4p)

**Tehtävä 2** (10p) Todista semanttisilla tauluilla seuraavat väittämät:

- (a)  $\models (A \rightarrow D) \vee (B \rightarrow D) \vee (C \rightarrow D) \rightarrow (A \wedge B \wedge C \rightarrow D)$ .
- (b)  $\models \forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y))$ .

Semanttisten taulujen tulee sisältää kaikki välivaiheet !!!

**Tehtävä 3** (10p) Johda lauseelle

$$\neg(\exists x(A(x) \vee B(x) \vee C(x)) \rightarrow \exists xA(x) \vee \exists yB(y) \vee \exists zC(z))$$

Prenex-normaaliomuoto sekä mahdollisimman yksinkertainen klausuulimuoto (eli klausuulijoukko  $S$ ) ja osoita  $S$  toteutumattomaksi resoluutiolla.

**Tehtävä 4** (10p) Esitetään luonnolliset luvut  $0, 1, 2, \dots$  muuttujattomilla termeillä  $0, s(0), s(s(0)), \dots$ , jotka rakentuvat vakiosymbolista  $0$  ja funktiosymbolista  $s$ , joka tulkitaan funktioksi  $s(x) = x + 1$  luonnollisille luvuille  $x$ .

- (a) Määrittele predikaatti  $M(x, y, z) =$  “luku  $y$  kuuluu välille  $x, \dots, z$  mukaanlu-  
kien päätepisteet” predikaattilogiikan lausein siten, että määritelmäsi kattaa  
kaikki luonnolliset luvut (yllä kuvatulla tavalla esitettynä).
- (b) Anna vastamalli, jonka perusteella määritelmästäsi ei seuraa loogisesti

$$\forall x \forall y \forall z (M(x, y, z) \rightarrow M(z, y, x)).$$

**Tehtävä 5** (10p)

- (a) Johda ohjelmalle `if (x < y) then {z = y - x} else {z = x - y}` heikoin esiehto  
lähtien liikkeelle *jälkiehdosta* ( $z > 0$ ). (4p)
- (b) Tarkastellaan seuraavaa ohjelmaa Middle:

$$z = x ; v = y ; \text{while}(! (z == v)) \{z = z + 1 ; v = v - 1\}.$$

Osoita heikoimpia esiehtoja ja sopivaa invarianttia käyttäen (6p), että

$$\models_p [\text{true}] \text{Middle} [2 * v == x + y].$$