Matematiikka
Aalto-yliopisto

Nevanlinna/Vesanen

Mat-1.2990 Modernin analyysin perusteet

2. välikoe 7.5.2011 klo 10-13

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia. Koeaika on 3h.

1. (a) Olkoot Λ_1 ja Λ_2 kaksi distribuutiota. Anna distribuution määritelmä ja todista, että $\Lambda_1 + \Lambda_2$ on distribuutio.

   (b) Anna määritelmä distribuutiojonon suppenemiselle. Olkoot $(\Lambda_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ ja $(\Lambda_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ kaksi distribuutiojonoa ja
$$\Lambda_{1,n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda_1 \text{ ja } \Lambda_{2,n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda_2.$$
   Todista, että
$$\Lambda_{1,n} + \Lambda_{2,n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia?

   (a) Olkoon $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ Carathéodoryn ulkomitta. Tällöin X:n kompaktit joukot ovat mitallisia.

   (b) Olkoot $E_n \subset X$ avoimia kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$
   on Borelin joukko.

   (c) Olkoot $X = \mathbb{R}^n$ ja $\varphi = \lambda^*$ eli Lebesguen ulkomitta, sekä $E \subset X$ joukko, jolla ei ole sisäpisteitä. Tällöin $\lambda^*(E) = 0$.

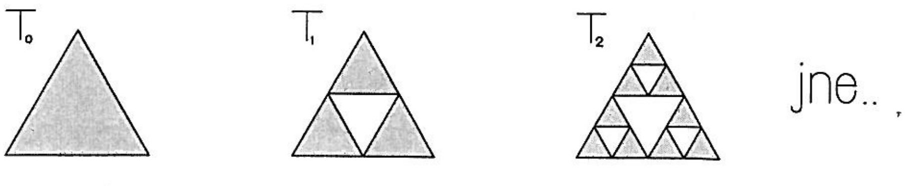
   (d) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin $f \circ g$ on Lebesgue-mitallinen.

   Täytä veikkausrivi, missä 1 = väite tosi, x = en tiedä, 2 = väite epätosi. Jos jokin väite on mielestäsi väärä, anna vastaesimerkki tai perustele hyvin. Tehtävän arvostelussa väärä vastaus tuo negatiivisia pisteitä, oikea positiivisia ja x ei tuo eikä vie. Väärästä perustelusta ei kuitenkaan sakoteta.

   Jäljennä paperiisi viereinen ruudukko, täytä rivisi siihen ja anna mahdolliset vastaesimerkit.

a	b	c	d

3. Olkoon λ tason Lebesguen mitta. Olkoon T_0 tasasivuinen kolmio siten, että $\lambda(T_0) = 1$. Jaetaan kolmio T_0 neljään yhtäsuureen kolmioon ja poistetaan niistä keskimmäisen sisäpisteet. Saatua kolmen tasasivuisen kolmion joukkoa kutsutaan T_1:ksi. Vastaavasti jatketaan jokaisen kolmion kohdalla.



   Merkitään $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$.

   Todista, että T on Lebesguen mitallinen ja laske $\lambda(T)$.

4. Kurssilla esiteltiin tärkeitä suppenemislauseita, joista erään avulla voidaan laskea
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \cos(x^{2011}/n)\, e^{-x}\, dx.$$

   (a) Muotoile kyseinen kurssilla esitelty lause.

   (b) Laske mainittu lasku a-kohdassa antamasi lauseen avulla.