Aalto-yliopisto
Mat-1.1110 Matematiikan peruskurssi C1 **Joensuu/Baarman**
Tentti 12.01.2012

Ylioppilaskirjoituksissa sallitut laskimet sallittu. Tee joko tentti tai yksi välikokeista.

Tentti

1. Olkoot a ja r reaalilukuja, $r \neq 1$. Osoita induktiolla, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n
$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}.$$
2. Ratkaise kongruenssiyhtälö $257x \equiv 12 \pmod{2012}$.
3. Diagonalisoi, jos mahdollista, matriisit
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
4. a) Etsi käyrän $y = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, käännepisteet.

   b) Osoita, että yhtälöllä $\sin x = 1 - x$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisulle sellainen likiarvo Newtonin menetelmällä, että vähintään kahdeksan ensimmäistä desimaalia ovat oikein. Kirjaa ylös Newtonin menetelmän iteraatit x_n, joilla ratkaisuun päädyit.
5. Etsi käyrän $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ kaarenpituus kohdasta $x = 0$ kohtaan $x = \ln 2$.

1. välikoe

1. Olkoot a ja r reaalilukuja, $r \neq 1$. Osoita induktiolla, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n
$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}.$$
2. a) Määritä kompleksiluvun $2 + \sqrt{3}i$ käänteisluku muodossa $x + yi$.

   b) Määritellään joukossa $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ relaatio R seuraavasti:
$$nRm \iff n + m \text{ on jaollinen luvulla } 4$$
   Selvitä onko R ekvivalenssirelaatio.
3. Ratkaise kongruenssiyhtälö $257x \equiv 12 \pmod{2012}$.
4. a) Piirrä kuusi kappaletta keskenään ei-isomorfisia seitsemän solmun puita.

   b) Olkoon G kaksijakoinen (bipartite) graafi, jossa on pariton määrä solmuja. Osoita, että graafissa G ei voi olla Hamiltonin kierrosta.

2. välikoe

1. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{b} = [2 \quad -3 \quad 3]^T$. Ratkaise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kun
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

2. Laske $\det(A)$ ja $\det(A^2)$, kun
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Olkoon $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 3]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 0]^T$, $\mathbf{v}_3 = [0 \quad -1 \quad 1 \quad 1]^T$. Esitä vektorit $\mathbf{u} = [3 \quad 5 \quad -7 \quad 6]^T$ ja $\mathbf{w} = [2 \quad -3 \quad 2 \quad -3]^T$ vektoreiden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{v}_3$ lineaarikombinaatioina, jos mahdollista.

4. Diagonalisoi, jos mahdollista, matriisit
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. välikoe

1. Määritä funktion $f(x) = e^x$ astetta neljä oleva Taylorin polynomi kun kehityskeskus $a = -1$.

2. a) Etsi käyrän $y = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, käännepisteet.
   b) Osoita, että yhtälöllä $\sin x = 1 - x$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisulle sellainen likiarvo Newtonin menetelmällä, että vähintään kuusi ensimmäistä desimaalia ovat oikein. Kirjaa ylös Newtonin menetelmän iteraatit x_n, joilla ratkaisuun päädyit.

3. a) Laske
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$
   sijoituksella $x = 2 \sin \theta$.
   b) Laske
$$\int \overline{\arccos}\, x \, dx.$$

   Seuraavista voi olla apua:
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \ \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \ \frac{d}{dx} \overline{\arccos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. Etsi käyrän $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ kaarenpituus kohdasta $x = 0$ kohtaan $x = \ln 2$.