Aalto-yliopisto
Mat-1.1710 Matematiikan peruskurssi V1
Turunen/Grenrus

1. välikoe 21.2.2011 klo 16–19.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot on kielletty!

1. Osoita, että $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n.

2. a) Etsi ne kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, joille
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \leq 1,$$
missä $\mathrm{Re}(w)$ on luvun $w \in \mathbb{C}$ reaaliosa.

   b) Miten lasketaan vektorien $x, y \in \mathbb{R}^3$ pistetulo $x \cdot y$ ja ristitulo $x \times y$? Todista laskemalla, että vektori x on kohtisuorassa vektorin $x \times y$ kanssa (jokaisella $x, y \in \mathbb{R}^3$).

3. Olkoon
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Ratkaise Gauss-eliminaatiolla lineaarinen yhtälö $A(x) = (0,0,0)$.

4. Matriisin $[A] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ k:s potenssi $[A]^k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ määritellään matriisitulon avulla siten, että
$$\begin{cases} [A]^1 := [A], \\ [A]^k := [A]^{k-1}[A]. \end{cases}$$
Laske $[A]^5$, kun $[P]^{-1}[A][P] = [D]$, missä
$$[D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$