Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, perustieteiden korkeakoulu

Arponen/Perkkiö

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

tentti 12.12.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Kaavoja kääntöpuolella. Koeaika on 4h.

Valitse 5 tehtävää.

1. (a) Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sarakkeiden virittämän avaruuden ortogonaalinen vektorikanta $\{v_1, v_2, v_3\}$ Gram-Schmidt -ortogonalisoinnilla. Laske myös ortonormeerattu vektorikanta $\{u_1, u_2, u_3\}$.

   (b) Laske A:lle QR-hajotelma. Saatat hyötyä (a)-kohdan tuloksesta.

2. (a) Esitä symmetrinen matriisi $A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ muodossa $A = PDP^{-1}$. Valitse P siten, että $P^{-1} = P^T$, jos se on mahdollista. (3p.)

   b) Funktio $x(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälösysteemin $x(t)' = Ax(t)$ alkuehdolla $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Laske vektori $x(1) =?$ arvo, ts. ratkaisu hetkellä $t = 1$. (2p.)

   c) Onko systeemin $x' = Ax$ kriittinen piste lähde, nielu, keskus vai satulapiste? (1p.)

3. (a) Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 6 & 13 & 11 \\ 12 & 11 & 26 \end{bmatrix}$$

   Cholesky-hajotelma $A = LL^T$. Vaihtoehtoisesti voit muodostaa LU-hajotelman.

   (b) Ratkaise (a)-kohdan hajotelmaasi käyttäen

$Ly = b$ $\qquad$ $L^T x = y$

$$Ax = b, \quad \text{kun} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

4. Määritä ylimäärätyn yhtälöryhmän

$x - y = -10$

$-x + y = 10$

$$\begin{aligned} x - y &= -10 \\ 2x - y &= -5 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$2x - \frac{10}{3} = -5$

$-x = 10 - y$

$2y = -x$

$2y = 10 - y$

$3y = 10$

$y = \frac{10}{3}$

   pienimmän neliösumman ratkaisu.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

   Laplace-muunnoksella.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$x' = tx^2, \quad x(0) = 1$$

numeerisesti aikavälillä $0 \leq t \leq 1$

(a) Eulerin menetelmällä, askelpituus $h = 0.25$.

(b) Parannellulla Eulerilla, askelpituus $h = 0.5$.

(c) Runge-Kutalla, askelpituus $h = 1$.

Esitä tulokset (yhtenä tai useampana) taulukkona, jossa selkeästi $t^{(k)}$:t ja $x^{(k)}$:t.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Annettu $f(t)$, merkitään $F = \mathcal{L}f$, eli $F(s) = \int_0^\infty \ldots (?) \ldots \, dt$.

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s),$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \ \ \mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}f(s/a).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$

Numeerisia menetelmiä yhtälölle $x' = F(x,t)$:

- Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + hF(x^{(k-1)}, t^{(k-1)})$.
- Implisiittinen Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + hF(x^{(k)}, t^{(k)})$.
- Paranneltu Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{h}{2}\Big(c_1 + c_2\Big)$, missä

$$c_1 = F(x^{(k-1)},\, t^{(k-1)}),$$
$$c_2 = F(x^{(k-1)} + hc_1,\, t^{(k-1)} + h).$$

- Runge-Kutta: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{h}{6}\Big(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4\Big)$, missä

$$c_1 = F(x^{(k-1)},\, t^{(k-1)}),$$
$$c_2 = F(x^{(k-1)} + \frac{1}{2}hc_1,\, t^{(k-1)} + \frac{1}{2}h),$$
$$c_3 = F(x^{(k-1)} + \frac{1}{2}hc_2,\, t^{(k-1)} + \frac{1}{2}h),$$
$$c_4 = F(x^{(k-1)} + hc_3,\, t^{(k-1)} + h).$$