Matematiikka
Aalto-yliopisto

Varpanen

Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II (5op)

Tentti 4.2.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää laskinta. Koeaika on neljä tuntia.

1. Tarkastellaan matriisia
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ 14 & -8 & 4 \\ 10 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$
   a) Laske matriisin ominaisarvot ja -vektorit. (4p)
   b) Kuvaile geometrisesti lineaarikuvauksen $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ käyttäytymistä. (2p)

2. Määritä yleinen ratkaisu DY-parille $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, missä
$$a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a-kohta 2p, b-kohta 4p)

3. a) Osoita: jos $A \in M^{n\times n}$ on symmetrinen, niin e^A on symmetrinen. (2p)
   b) Laske e^A, kun $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. (4p)

4. a) Esitä Laplace-muunnoksen määritelmä. (2p)
   b) Laske perustellen vakiofunktion Laplace-muunnos. (4p)

5. Kaupustelija kulkee kaupunkien A, B ja C välillä Markovin matriisin
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$
   mukaisesti.
   a) Piirrä matriisia vastaava tilaverkko. (2p)
   b) Miten usein (keskimäärin) kaupustelija vierailee kussakin kaupungissa? (2p)
   c) Miksi b-kohdan kysymys on järkevä? (2p)

Kaavasivu kääntöpuolella.

Taulukko Laplace-muunnoksista

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	suppenemisalue
c (vakio)	$\frac{c}{s}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$e^{kt},\ k \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-k}$	$\mathrm{Re}\,(s) > \mathrm{Re}\,(k)$
$\sin at,\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$\cos at,\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$e^{-kt}\sin at,\ k, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{(s+k)^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > -k$
$e^{-kt}\cos at,\ k, a \in \mathbb{R}$	$\frac{s+k}{(s+k)^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > -k.$

Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, kun $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma$, niin

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a),\ \ \mathrm{Re}\,(s) > \sigma + \mathrm{Re}\,(a)$$

kaikilla $a \in \mathbb{C}$ ja

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s),\ \ \mathrm{Re}\,(s) > \sigma.$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos myös $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, kun $\mathrm{Re}\,(s) > \delta$, niin

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s),\ \ \mathrm{Re}\,(s) > \max\{\sigma, \delta\}$$

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.