Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, perustieteiden korkeakoulu

Arponen

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

tentti 4.2.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Kaavoja kääntöpuolella. Koeaika on 4h.

Valitse 5 tehtävää.

1. Ratkaise lineaarinen differentiaaliyhtälösysteemi

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

2. Laske matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

singulaariarvot σ_i sekä (vasen- ja oikea-) singulaarivektorit. Esitä tulos singulaarihajotelman muodossa $A = U\Sigma V^T$.

3. Katsotaan (epälineaarista) differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 - x_2^2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

(a, 1p) Määritä kriittiset pisteet ($x' = 0$)

(b, 4p) Linearisoi (1) kriittisissä pisteissä ja luokittele kunkin tyyppi ja stabiilius.

(c, 1p) Voidaanko (b)-kohdan tuloksista päätellä yhtälön (1) stabiiliudet? Perustele lyhyesti.

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 2y = 4t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

Laplace-muunnoksella.

5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 8 \\ -4 & 26 & 3 \\ 8 & 3 & 41 \end{bmatrix}$$

(a) Selitä, miksi matriisi A on positiivisesti definiitti. (Vihje: Gershgorin.)

(b) Määritä matriisin A Cholesky-hajotelma muodossa $A = LL^T$.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$x' = tx^2, \quad x(0) = 1$$

numeerisesti aikavälillä $0 \le t \le 1$

(a) Eulerin menetelmällä, askelpituus $h = 0.25$.

(b) Parannellulla Eulerilla, askelpituus $h = 0.5$.

(c) Runge-Kutalla, askelpituus $h = 1$.

Esitä tulokset (yhtenä tai useampana) taulukkona, jossa selkeästi $t^{(k)}$:t ja $x^{(k)}$:t.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Annettu $f(t)$, merkitään $F = \mathcal{L}f$, eli $F(s) = \int_0^\infty \ldots (?) \ldots \, dt$.

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s),$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\left(f(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}f(s/a).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$

Numeerisia menetelmiä yhtälölle $x' = F(x,t)$:

- Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + hF(x^{(k-1)}, t^{(k-1)})$.
- Implisiittinen Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + hF(x^{(k)}, t^{(k)})$.
- Paranneltu Euler: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{h}{2}\Big(c_1 + c_2\Big)$, missä

$$c_1 = F(x^{(k-1)}, t^{(k-1)}),$$
$$c_2 = F(x^{(k-1)} + hc_1, t^{(k-1)} + h).$$

- Runge-Kutta: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{h}{6}\Big(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4\Big)$, missä

$$c_1 = F(x^{(k-1)}, t^{(k-1)}),$$
$$c_2 = F(x^{(k-1)} + \frac{1}{2}hc_1, t^{(k-1)} + \frac{1}{2}h),$$
$$c_3 = F(x^{(k-1)} + \frac{1}{2}hc_2, t^{(k-1)} + \frac{1}{2}h),$$
$$c_4 = F(x^{(k-1)} + hc_3, t^{(k-1)} + h).$$