

Ene-39.4037 Laskennallisen virtausmekaniikan ja lämmönsiirron perusteet
Tentti 13.1.2011

Tenttipaperiin selvästi nimi, opiskelijanumero tarkistusosineen ja koulutusohjelma.

1. Selvitä seuraavat käsitteet ja niiden merkitystä laskennallisessa virtausmekaniikassa (3p):

- säilymisominaisuus
- konvektio-ominaisuus
- entropiaehdon toteutuminen TVD-menetelmällä

2. Rajakerrosteoriassa energiayhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Handwritten notes:

$$dT_x = \frac{T_x}{dx} dx + \frac{T_x}{dy} dy$$

$$dT_y = \frac{T_y}{dx} dx + \frac{T_y}{dy} dy$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ u & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{yy} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow dx = 0$
parabolinen

Määritä yhtälön tyyppi. Mitä tyyppiä olevia ratkaisumenetelmiä voidaan tämän tyyppiselle yhtälölle käyttää? Onko yhtälöllä karakteristisia suuntia ja jos on, mitä suunnat kuvaavat? (6p).

3. Diskretoi konvektio-diffuusioyhtälö

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Handwritten notes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = u \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$$

ajan suhteen eksplisiittisesti, konvektiotermi ylävirtadiskretoinnilla ja diffuusiotermi symmetrisesti. Mitkä ovat tämän approksimaation katkaisuvirheen kaksi korkeimman kertaluvun termiä? Kirjoita näkyviin myös virhetermien kertoimet (6p).

Handwritten notes:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

4. Osoita, että kolmen aikatason eksplisiittinen Richardsonin menetelmä (1910)

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

on epästabiili kaikilla aika-askeleilla.

5. Tehtävänäsi on simuloida jäteveden sisältämien ravinteiden leviämistä merenalaisesta purkuaukosta. Alueen laajuuden vuoksi tilanne voidaan käsitellä kaksi-dimensioisena, jossa purkukohta on 5 km päässä rannikosta sijaitseva pistelähde. Simulointi voidaan tehdä konvektio-diffuusioyhtälöllä. Nopeusjakaumat tiedetään

Handwritten note: $O(\Delta t, \Delta x)$

Termiä

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$\frac{\alpha - u\Delta x}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

tuuliolosuhteiden perusteella ja diffuusiokertoimelle tunnetaan laskentakaavat. Tiedetään lisäksi, että ravinteet sedimentoituvat pohjaan ja sedimentoitumisen nopeus on verrannollinen ravinnepitoisuuden toiseen potenssiin. Pyri kuvaamaan kvalitatiivisesti laskenta-algoritmissa käytetyt menetelmät, tarvitsemasi reunaehdot, diskretointi jne. Havainnollista asiaa piirroksin, lohko- yms. kaavioin. Suunnittele myös tapaukseen sopiva hilytyyppi ja selvitä, mitä yksinkertaistuksia geometriaan mahdollisesti tarvitaan. Tehtävä voidaan ratkaista monella tavalla eikä se edellytä *kaikkien* käytössä olevien yhtälöiden eksplisiittistä kirjoittamista näkyviin (9p).