Aalto-yliopisto
Matematiikan laitos
2.9.2011

Alestalo/Arponen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

Valitse viisi (5) tehtävää kuudesta. Ei laskimia eikä taulukoita.

1. Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on parillinen, 2-jaksollinen ja $f(x) = 1 - x$, kun $0 \le x \le 1$. Määritä funktion f Fourier-sarja joko reaalisessa tai kompleksisessa muodossa.

2. Johda Fourier-muunnokseen ja konvoluutioon liittyvä kaava $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, kun $f, g \in L^1(\mathbf{R})$.

3. Esitä Laplace-yhtälön ratkaisujen maksimiperiaate.
b) Olkoon $D \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu alue sekä $f\colon D \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \partial D \to \mathbf{R}$ jatkuvia. Osoita, että Dirichlet'n ongelmalla
$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in D, \\ u(y) = g(y), & y \in \partial D, \end{cases}$$
on korkeintaan yksi ratkaisu $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$.

4. Määritä funktionaalin
$$I(u) = \int_1^2 \frac{(u')^2}{x^3}\,dx$$
ekstremaali reunaehdoilla $u(1) = -10,\ u(2) = 20$.

5. Olkoon
$$f(x) = 1 - x/L, \quad 0 \le x \le L. \tag{1}$$
   (a) Laske (1):n sinisarjaesitys ja neliöllinen virhe σ_N^2. Onko sarjan suppeneminen tasaista? Kuinka nopeasti σ_N^2 pienenee?
   (b) Laske (1):n kosinisarjaesitys ja neliöllinen virhe σ_N^2. Onko sarjan suppeneminen tasaista? Kuinka nopeasti σ_N^2 pienenee?

6. Aaltoyhtälön
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \end{cases}$$
diskretoinnissa eräällä 2-askelmenetelmällä päädyttiin systeemiin:
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_h^{k+1} = 2\boldsymbol{u}_h^k - \boldsymbol{u}_h^{k-1} + c^2\delta^2\Delta_h \boldsymbol{u}_h \\ \boldsymbol{u}_h^0 = \boldsymbol{f}_h,\ \boldsymbol{u}_h^1 = (\boldsymbol{I} + \frac{c^2\delta^2}{2}\Delta_h)\boldsymbol{f}_h + \delta \boldsymbol{g}_h. \end{cases} \tag{2}$$
Millainen stabiiliusehto δ:lle näistä johdettiin? (Vihje: Δ_h:n ominaisvektoreista alkavien ratkaisujen (energian) ei tulisi kasvaa eikä vaimeta.)