

## Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 02.09.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Laske

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

2. Ratkaise seuraavat alkuarvot tehtävät:

$$\text{a) } y' = 1 + \frac{2}{y-x}, \quad y(1) = 3$$

$$\text{b) } y'' = y' + \frac{2y'}{y'-y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

3. Ratkaise Lagrangen kertojien menetelmällä sidottu ääriarvot tehtävä  $xyz^3 = \max!$  ehdolla  $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ .

4.  $R$ -säteisen kuulan massatiheys on  $\rho = \rho_0(r/R)^\alpha$ , missä  $r$  on etäisyys kuulan keskipisteestä,  $\rho_0$  on vakio ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Kuulan hitausmomentti kuulaa sivuavan suoran  $S$  suhteen on  $I_S = \frac{3}{2}mR^2$ , missä  $m$  = kuulan massa. Mikä on  $\alpha$ :n arvo?

5. On annettu avaruuden vektorikenttä  $\vec{F} = (2x + yz - 1)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + (xy + 1)\vec{k}$ .

a) Laske polkuintegraali  $\int_p \vec{F} \times d\vec{r}$ , kun  $p$  kulkee pisteestä  $P = (0, 0, 0)$  pisteeseen  $Q = (1, 1, 1)$  pitkin parabolisten lieriöiden  $y = x^2$  ja  $z = y^2$  leikkauskäyrää.

b) Väitetään, että polkuintegraalin  $\int_p \vec{F} \cdot d\vec{r}$  arvo riippuu vain polun  $p$  päätepisteistä. Onko väite tosi? Perustele!

## Mat-1.1020 Grundkurs L2

Tentamen 02.09.2011

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Laske

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

2. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät:

$$\text{a) } y' = 1 + \frac{2}{y-x}, \quad y(1) = 3$$

$$\text{b) } y'' = y' + \frac{2y'}{y'-y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

3. Ratkaise Lagrangen kertojien menetelmällä sidottu ääriarvotehtävä  $xy^2z^3 = \max!$  ehdolla  $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ .

4.  $R$ -säteisen kuulan massatiheys on  $\rho = \rho_0(r/R)^\alpha$ , missä  $r$  on etäisyys kuulan keskipisteestä,  $\rho_0$  on vakio ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Kuulan hitausmomentti kuulaa sivuavan suoran  $S$  suhteen on  $I_S = \frac{3}{2}mR^2$ , missä  $m$  = kuulan massa. Mikä on  $\alpha$ :n arvo?

5. On annettu avaruuden vektorikenttä  $\vec{F} = (2x + yz - 1)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + (xy + 1)\vec{k}$ .

a) Laske polkuintegraali  $\int_p \vec{F} \times d\vec{r}$ , kun  $p$  kulkee pisteestä  $P = (0, 0, 0)$  pisteeseen  $Q = (1, 1, 1)$  pitkin parabolisten lieriöiden  $y = x^2$  ja  $z = y^2$  leikkauskäyrää.

b) Väitetään, että polkuintegraalin  $\int_p \vec{F} \cdot d\vec{r}$  arvo riippuu vain polun  $p$  päätepisteistä. Onko väite tosi? Perustelee!