

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Tentti 12.01.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Todista lukujonoväittämät

- a) $a_n < b \forall n \wedge a_n \rightarrow a \not\Rightarrow a < b$
b) $a_n \leq b \forall n \wedge a_n \rightarrow a \Rightarrow a \leq b$

2. Karteesisen koordinaatiston origo on maapallon keskipisteessä ja vektori \vec{k} osoittaa pohjoisnavalle päin. Eteläisen pallonpuoliskon pisteessä, jonka pallonpintakoordinaatit ovat $\theta = 135^\circ$, $\varphi = 120^\circ$ laiva on matkalla luoteeseen. Määritä laivan liikesuunta yksikkövektorina sekä pallokoordinaatiston kannassa $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$ että karteesisen koordinaatiston kannassa $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Määritä muuttujan vaihdolla – siis ilman derivointia! – raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 12}{\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6}$.

4. Esitä a) luku $(-2)^i$, b) yhtälön $\cos z = 2$ kaikki ratkaisut kompleksiluvun perusmuodossa $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Tarkastellaan sykloidia $S : x = x(t) = t - \sin t$, $y = y(t) = 1 - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Millä y :n arvoilla pätee: S :n normaali pisteessä $P = (x, y) \in S$ on suoran $y = -2x$ suuntainen?

b) Käyrän S ja suoran $x = \pi/2$ leikkauspisteen selvittämiseksi halutaan ratkaista yhtälö $x(t) = \pi/2$. Arvellaan, että ratkaisu on likimain $t \approx t_0 = 2\pi/3$. Tarkenna tämä alkuarvaus iteroimalla kerran Newtonin menetelmällä. Ilmoita tarkennettu tulos kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. Numeroapu: $\pi/9 = 0.3490\dots$, $1/\sqrt{2} = 0.7071\dots$, $1/\sqrt{3} = 0.5773\dots$