

## Mat-1.1010 Grundkurs L1

Tentamen 12.01.2012

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Bevisa följande påståenden för talföljder

a)  $a_n < b \forall n \wedge a_n \rightarrow a \not\Rightarrow a < b$

b)  $a_n \leq b \forall n \wedge a_n \rightarrow a \Rightarrow a \leq b$

2. Origo för ett kartesiskt koordinatsystem är i jordens mittpunkt och vektorn  $\vec{k}$  pekar mot nordpolen. Ett fartyg befinner sig på södra halvklotet i punkten, vars sfäriska koordinater är  $\theta = 135^\circ$ ,  $\varphi = 120^\circ$  och seglar åt nordväst. Bestäm enhetsvektorn för fartygets rörelseriktning dels i basen  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$  för sfäriska koordinater, dels i basen  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  för kartesiska koordinater.

3. Bestäm via variabelbyte – alltså utan derivering! – gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 12}{\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6}$ .

4. Ge a) talet  $(-2)^i$ , b) alla lösningar till ekvationen  $\cos z = 2$  på grundformen  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  för komplexa tal.

5. Vi studerar cykloiden  $S: x = x(t) = t - \sin t$ ,  $y = y(t) = 1 - \cos t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

a) För vilka  $y$ -värden gäller: Normalen till  $S$  i punkten  $P = (x, y) \in S$  är parallel med linjen  $y = -2x$ ?

b) För att bestämma skärningspunkten mellan  $S$  och linjen  $x = \pi/2$  vill vi lösa ekvationen  $x(t) = \pi/2$ . Vi uppskattar, att  $t \approx t_0 = 2\pi/3$ . Förbättra denna uppskattning genom att iterera en gång med Newtons metod. Ge det förbättrade resultatet med tre gällande siffrors noggrannhet. Numerisk hjälp:  $\pi/9 = 0.3490\dots$ ,  $1/\sqrt{2} = 0.7071\dots$ ,  $1/\sqrt{3} = 0.5773\dots$ .