

1. a) Määrittele konvekssi joukko ja konvekssi funktio. Esitä käsitteiden välinen yhteys epigraafin avulla. Piirrä lisäksi kuva havainnollistamaan asiaa.
- b) Määrittele alitasojoukko (lower-level set) ja esitä funktio (esim. piirtämällä) jonka kaikki alitasojoukot ovat konvekseja, mutta funktio ei ole konvekssi.
- c) Määrittele konvekssi optimointitehtävä ja esitä sen välttämättömät ja riittävät optimaalisuusehdot. Määrittele tarvitsemasi käsitteet.
2. a) Selosta lyhyesti miten separointilauseet liittyvät kurssilla optimointiin, ja miten Fritz-Johnin (FJ) ja Karush-Kuhn-Tucker (KKT) optimaalisuusehdot eroavat toisistaan.
- b) Selitä lyhyesti miten välttämättömät optimaalisuusehdot eroavat riittävästä ehdoista. Esitä sekä välttämättömät että riittävät KKT ehdot (kahdet eri ehdot).
- c) Esitä riittävät optimaalisuusehdot rajoittamattomalle sileälle minimointitehtävälle. Esitä myös toisen kertaluvun välttämättömät ehdot lokaalille minimille.
3. a) Määritä seuraavan funktion alidifferentiaali, ja esitä funktio ja sen alidifferentiaali graafisesti,

$$f(x) = \begin{cases} |x|-1 & \text{kun } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{kun } |x| < 1. \end{cases}$$

- b) Ratkaise seuraava optimointitehtävä KKT-ehdoja käyttäen

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \text{s.e.} & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Perustele ja piirrä kuva. Toteuttaako löytämäsi piste tehtävän 1.c) ehdot?

4. a) Esitä Weierstrassin lause ja selosta miten se liittyy optimointiin.
- b) Määrittele käsitteet: kannatteleva hypertaso, kartio, konvekssi kuori ja funktion tasa-arvokäyrä. Piirrä kuvat havainnollistamaan käsitteitä.
- c) Esitä minimietäisyyslause.