Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos

Nevanlinna / Korte

Mat-1.2990 Modernin analyysin perusteet

Välikoe 1, 4.3.2006

Tätäkään ei ole tenttiaineistossa!

1. Olkoon annettuna joukko $X \neq \emptyset$. Merkitsemme $x\mathcal{R}y$, kun x:n ja y:n välillä on relaatio $\mathcal{R}$.
   (a) Määrittele ekvivalenssirelaatio.
   (b) Määrittele osittaisjärjestys.
   (c) Oleta, että relaatio $\mathcal{R}$ on sekä osittaisjärjestys että ekvivalenssirelaatio. Määrää ekvivalenssiluokat $[x]$ kaikille $x \in X$.
   (d) Jos $\mathcal{R}$ on täysi järjestys ja ekvivalenssirelaatio, mitä voit sanoa joukosta X?

2. Määritellään avaruuteen $\mathbb{R}^2$ metriikka seuraavasti:
$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x = cy \text{ jollain } c \in \mathbb{R}, \\ |x| + |y|, & x \neq cy \text{ kaikilla } c \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
missä $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on euklidinen normi.
   (a) Osoita, että $\tilde{d}$ on metriikka.
   (b) Olkoot d_1 ja d_2 metriikoita joukossa X. Sanotaan, että d_1 on vahvempi kuin d_2, jos on olemassa $c > 0$ siten, että
$$d_1(x,y) \geq c d_2(x,y) \text{ kaikilla } x, y \in X.$$
   Jos d_1 on vahvempi kuin d_2 ja d_2 on vahvempi kuin d_1, metriikat ovat ekvivalentteja. Mikä on tilanne $\mathbb{R}^2$:ssa euklidisen metriikan d_e ja metriikan $\tilde{d}$ kohdalla? Onko jompikumpi metriikka vahvempi tai ovatko metriikat ekvivalentteja? Perustele.

3. Olkoon annettuna metrinen avaruus X ja kompakti joukko $K \subset X$.
   (a) Määrittele tarkasti kompakti joukko.
   (b) Olkoon $S_j \subset K$ suljettuja joukkoja kaikilla $j = 1, 2, \ldots$. Ovatko seuraavat väitteet totta vai tarua? (Ei tarvitse perusteluja. Oikea vastaus 1p, väärä -1p.)
      i. $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ on aina kompakti.
      ii. $\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j$ on aina kompakti.
   (c) Todista suoraan määritelmän perusteella, että jos $S \subset K$ on suljettu, niin S on kompakti.

4. Olkoon
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} \cos(kx).$$
   (a) Näytä, että $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti koko $\mathbb{R}$:llä kohti funktiota f.
   (b) Osoita määritelmään perustuen, että $\Lambda_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda_f$, kun $n \to \infty$.

   Huom! $\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ ei suppene.
   (c) Selitä, miksi
$$\Lambda_{f_n'} \xrightarrow{\mathcal{D}'} D\Lambda_f,$$
   vaikka f_n' ei suppenekaan esimerkiksi origossa.