Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Tätä ei ole tenttikirjoissa)

Nevanlinna/Vesanen

Mat-1.2990 Modernin analyysin perusteet

1. välikoe 6.3.2010 klo 10-13

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia. Koeaika on 3h.

1. (a) Anna määritelmä sille, että kaksi joukkoa A ja B ovat yhtä mahtavat.

   (b) Luennolla on esitetty seuraava lause: riittää että on olemassa injektio $f : A \to B$ ja surjektio $g : A \to B$, jotta joukot A ja B ovat yhtä mahtavat.
   Osoita, että joukon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mahtavuus eli kardinaliteetti on c antamalla kaksi kuvausta
   $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1],$$
   joista toinen on injektio ja toinen surjektio.

2. Olkoon $X \neq \emptyset$, ja oletetaan, että X:n kardinaliteetti ei ole äärellinen. Varustetaan X diskreetillä metriikalla d. Vastaa lyhyesti perustellen seuraaviin kysymyksiin.

   (a) Mitkä ovat avaruuden X avoimet joukot? Entä suljetut?

   (b) Mitkä ovat avaruuden X kompaktit joukot?

   (c) Olkoon $A \subset X$ mielivaltainen osajoukko. Määrää A:n reuna ∂A.

   (d) Milloin kuvaus $f : X \to X$ on jatkuva?

   (e) Mitkä ovat avaruuden (X, d) Cauchyn jonot? Entä suppenevat jonot?

   (f) Onko (X, d) täydellinen metrinen avaruus?

3. Olkoon X metrinen avaruus.

   (a) Määrittele, mitä tarkoittaa, että joukko $K \subset X$ on kompakti?

   (b) Todista kompaktiuden määritelmää käyttäen, että jos $K_1 \subset X$ ja $K_2 \subset X$ ovat kompakteja, niin myös yhdiste $K = K_1 \cup K_2$ on kompakti.

4. Tarkastellaan distribuutiota
   $$S_n := \sum_{j=-n}^{n} \delta_j,$$
   missä δ_j on distribuutio
   $$\delta_j(\varphi) = \varphi(j).$$
   Asetamme $S := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_j$.

   (a) Määrittele distribuutiot $\mathcal{D}'$, ja näytä, että $S \in \mathcal{D}'$.

   (b) Määrittele distribuutioiden suppeneminen
   $$\Lambda_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda$$
   ja näytä, että
   $$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} S.$$