

Mat-1.2990 Modernin analyysin perusteet

Tentti (tai 2. välikoe), 27.5.2011

Huom! *Tentti* koostuu tehtävistä 1.-5. ja kestää 4 h.
2. *välikoe* koostuu tehtävistä 3.-6. ja kestää 3 h.

1. Georg Cantor todisti mielivaltaiselle joukolle X väittämän

$$\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X)).$$

- (a) Mikä on $\mathcal{P}(X)$? (1p)
(b) Määrittele $\text{card}(X)$. (2p)
(c) Todista Cantorin väittämä. (3p)

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

- (a) Määrittele kompakti joukko.
(b) Olkoon $K \subset X$ ja $a \in X \setminus K$ siten, että

$$\inf_{x \in K} d(a, x) > 0.$$

Osoita suoraan määritelmän perusteella, että joukko

$$\{a\} \cup K$$

on kompakti jos ja vain jos K on kompakti.

3. Kirjoita lyhyet esseevastaukset seuraavista aiheista:

- (a) Mitkä vaatimukset distribuutioteorialle asetetaan.
(b) Miten nämä vaatimukset toteutuvat, ja mistä tavallisen kalkuluksen ominaisuudesta joudutaan luopumaan.

4. (a) Määrittele Cantorin joukko \mathcal{C} .
(b) Osoita, että \mathcal{C} on ylinumeroituva.
(c) Laske perustellen, mikä on \mathcal{C} :n Lebesguen mitta.

5. a) Muotoile Lebesguen monotonisen suppenemisen lause.
b) Muotoile Fatoun lemma.
c) Todista Fatoun lemma Lebesguen monotonisen suppenemisen lauseen avulla.

6. Muotoile Lebesguen dominoidun konvergenssin lause ja laske sen avulla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x/k) + \sin(x^2/k)}{1 + x^{2k}} dx.$$