

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Tentti 18.05.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Määritellään palautuva lukujono

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 2a_n}{a_n^2 + 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Näytä (tarvittaessa tunnettuihin lauseisiin vedoten), että

- (a) $\{a_n\}$ on monotoninen lukujono
 - (b) $\{a_n\}$ ei suppene kohti reaalilukua
 - (c) $\{a_n\}$ ei ole rajoitettu lukujono
2. Kahdella avaruustasolla T_1 ja T_2 on yhteinen normaalivektori $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Määritä tasojen yhtälöt perusmuodossa $ax + by + cz + d = 0$, kun tiedetään lisäksi, että molemmat tasot sivuavat palloa $S : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$.

3. a) Näytä, että

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

- b) Määritä kaikki kompleksiluvut $z = x + iy$, joille pätee $x > 0$, $y > 0$ ja $z^6 = 64i$. Laske x ja y tarkkoina geometrisina lukuina.
4. Avaruuden pistejoukko S koostuu ruuviviivan $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ tangenttien ja xy -tason leikkauspisteistä. Määritä S :n parametrisaatio tasokäyränä.
5. Funktio f on mielivaltaisen monta kertaa derivoituva välillä $(-1, \infty)$ ja ko. välillä pätee muualla kuin origossa: $f(x) = x^{-1} \ln(1+x) + x/2$. Määritä f :n kolmannen asteen Taylorin polynomi $T_3(x, 0)$. Onko f :llä paikallista minimiä tai maksimia origossa?