Matematiikan laitos
Aalto-yliopisto. Perustieteiden korkeakoulu

Pitkäranta/Hiltunen

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 27.05.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Laske

$$\text{a)}\ \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{c)}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

2. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} \lambda x_2 - x_4 = b_1 \\ x_1 - x_3 + \lambda x_4 = b_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = b_3 \\ \lambda x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = b_4 \end{cases}$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$ on parametri. Määritä λ, yhtälöryhmän ratkeavuusehdot ja yleinen ratkaisu (ratkeavuusehtojen toteutuessa), kun λ:n arvo tiedetään sellaiseksi, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, kun $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ja $b_4 = 1$.

3. Lentokone lentää ylöspäin pitkin avaruuskäyrää $S:\ y = x^2,\ z = \frac{1}{3}(2x + y^2)$, missä $z > 0$ on korkeus maan pinnasta (yksiköt km). Ilman lämpötila lentoradan lähellä on (yksikkö °C)

$$T(x,y,z) = -10(z^2 - z + 1) + (2x^2 + 3y)/(1 + z^2).$$

Ulkoilman lämpötilaa mitataan myös koneessa — olkoon mittaustulos $T(t)$ hetkellä t (min). Eräällä hetkellä kone on pisteessä $P = (1,1,1)$ ja sen vauhti on 6 km/min. Mikä on kyseisellä hetkellä mittarilukemasta $T(t)$ laskettu ulkoilman hetkellinen muuttumisnopeus $T'(t)$? Anna tulos yksikkönä °C/min.

4. Yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} xyz + y^2z + z^3 = 2.98 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 0.94 \\ 2y^3z + 3z^4 = 4.92 \end{cases}$$

on ratkaisu pisteen $(1,1,1)$ lähellä. Määritä ratkaisu likimäärin käyttäen Newtonin menetelmää ja Gaussin algoritmia. Yksi iteraatiokierros!

5. Olkoon $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$. Laske vektorikentän $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$ vuo V:n reunapinnan ∂V läpi V:n sisältä ulospäin
   a) Gaussin lauseen avulla,
   b) suoraan pintaintegraalina.

Institutionen för matematik
Aalto-universitet. Högskolan för teknikvetenskaper

Pitkäranta/Hiltunen

Mat-1.1020 Grundkurs L2

Tentamen 27.05.2011

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Beräkna

$$\text{a)}\ \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{c)}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

2. Vi studerar det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} \lambda x_2 - x_4 = b_1 \\ x_1 - x_3 + \lambda x_4 = b_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = b_3 \\ \lambda x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = b_4 \end{cases}$$

där $\lambda \in \mathbb{R}$ är en parameter. Bestäm λ, villkor för att ekvationssystemet skall vara lösbart samt allmänna lösningen (då villkoren för lösbarhet är uppfyllda), om man vet att λ:s värde är sådant att ekvationssystemet saknar lösning, då $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ och $b_4 = 1$.

3. Ett flygplan flyger uppåt längs rymdkurvan $S : y = x^2,\ z = \frac{1}{3}(2x + y^2)$, där $z > 0$ är höjden ovanför marken (enhet km). Lufttemperaturen nära flygbanan är (enhet °C)

$$T(x, y, z) = -10(z^2 - z + 1) + (2x^2 + 3y)/(1 + z^2).$$

Lufttemperaturen utanför planet mäts också från planet — låt mätresultatet vara $T(t)$ vid tiden t (min). I ett visst ögonblick är flygplanet i punkten $P = (1, 1, 1)$ och dess fart är 6 km/min. Hur stor är den uppmätta utetemperaturens $T(t)$ ändringshastighet $T'(t)$? Ge svaret med enheten °C/min.

4. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} xyz + y^2 z + z^3 = 2.98 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 0.94 \\ 2y^3 z + 3z^4 = 4.92 \end{cases}$$

har en lösning nära punkten $(1, 1, 1)$. Bestäm en approximation av lösningen genom att använda Newtons metod och Gauss' algoritm. En iteration!

5. Låt $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$. Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$ ut ur V genom dess randyta ∂V

a) med hjälp av Gauss' sats,

b) direkt som en ytintegral.