

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 27.10.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Laske seuraavien määrättyjen integraalien arvot:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx \quad \text{b) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1} \, dx$$

2. Piste $P = (x, y)$ on käyrällä $y = y(x)$, $x > 0$, ja käyrän tangentti pisteessä P leikkaa positiivisen y -akselin pisteessä Q . Mikä on käyrän yhtälö, kun tiedetään, että piste $(2, 1)$ on käyrällä ja että P :stä riippumatta kolmion OPQ ($O = \text{origo}$) pinta-ala $= 1$?

3. Olkoon \mathbf{A} ja \mathbf{B} samaa kokoa olevia neliömatriiseja. Näytä todeksi tai epätodeksi seuraavat väittämät:

- a) \mathbf{A} ja \mathbf{B} ortogonaaliset $\Rightarrow \mathbf{AB}$ ortogonaalinen
- b) \mathbf{A} ja \mathbf{B} symmetriset $\Rightarrow \mathbf{AB}$ symmetrinen
- c) \mathbf{A} ja \mathbf{B} kääntyviä ja kommutoivat $\Rightarrow \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 - (\mathbf{A} - \mathbf{B})^2$ kääntyvä

4. Laske tasointegraali

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{[1 + (x - y)^2 + (x + 2y)^2]^2} \, dx \, dy.$$

5. Olkoon S yksinkertainen suljettu käyrä avaruustasolla T , jonka yksikkönormaalivektori on $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Näytä, että S :n sisään jäävän tasoalueen A pinta-ala on

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \left| \oint_S [(bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz] \right|.$$