

0 0 0
 0 0 0
 1 0 0
 0 1 0
 0 1 0

Aalto-yliopisto, Matematiikan laitos Peltonen, Huhtanen / Vuojamo
Mat-1.1030, Matematiikan peruskurssi L 3
 2. välikoe, 15. 11. 2011

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

$x_1 = 3$ $x_2 = -1$
 $x_2 = 10$ $x_3 = 5$
 $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

1. Mitkä seuraavista vektoriavaruuden \mathbb{R}^n osajoukoista ovat sen vektori-aliavaruuksia? Miksi?

- (a) $V_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$.
- (b) $V_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$
- (c) $V_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0\}$

3/4 20/5

2. Olkoon P_n enintään astetta n olevien reaalimuuttujan reaalipolynomien muodostama vektoriavaruus. Tarkastellaan ehtojen $A(f)(x) = f(x^2)$ ja $B(f)(x) = x^2 f(x)$ määrittämiä kuvauksia $A, B : P_2 \rightarrow P_4$.

- (a) Osoita, että A ja B ovat lineaarisia kuvauksia. Päteekö $AB = BA : P_2 \rightarrow P_8$?
- (b) Määrää kuvausten A ja B ydin ja kuva-avaruus sekä niiden dimensiot. Onko A tai B injektio tai surjektio?
- (c) Määrää A :n ja B :n esitysmatriisit kantojen $\{1, x, x^2\}$ ja $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ suhteen.

3. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3/4 10/5

singulaariarvohajotelma (SVD).

4. Mitkä seuraavista kuvauksista $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ määräävät sisätulon vektoriavaruuteen V ? Miksi?

10/5

- (a) $V = \mathbb{R}^2$ ja $\langle x, y \rangle = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ kun $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V$.
- (b) $V = M_n(\mathbb{R})$ reaaliset $n \times n$ matriisit ja $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$.
- (c) $V = \mathbb{R}^3$ ja $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$ kun $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V$.

2/4 10/5

Myönteisessä tapauksessa muotoile kyseiselle sisätulolle Schwarzin epäyhtälö.

10/5

2 0 -2 | 1
 0 0 0 | 0
 -2 0 2 | 1

6 0 -2
 0 4 0
 -2 0 6